ALGÈBRES ET MODULES

Ibrahim Assem

Table des matières

Introduction.

Pendant plusieurs années de file, j'ai enseigné deux cours de deuxième cycle à l'Université de Sherbrooke. Ces cours, portant les titres respectifs d'"Algèbre non-commutative" et de "Théorie des catégories" sont conçus comme des cours d'introduction pour étudiants postulant une maîtrise en algèbre. Je me suis alors trouvé confronté au problème constitué par l'absence de manuel de cours (a fortiori en français) reflétant exactement l'esprit de ces cours, ainsi que mes propres goûts. J'en suis venu à rédiger mes notes de cours. Celles-ci, évoluant au fil des années, sont devenues le volume que voici. En le rédigeant, je m'étais fixé comme but de donner au lecteur une base solide pouvant être employée aussi bien dans ma propre spécialité (la théorie des représentations des algèbres associatives) que dans plusieurs autres domaines de l'algèbre moderne, comme par exemple la théorie des anneaux, l'algèbre homologique ou la théorie des catégories.

Le contenu de ce volume reflète ces choix. Si le fil conducteur en est l'étude des modules sur une K-algèbre (où K est un anneau commutatif, associatif et unifère), il se divise en trois parties. Les chapitres I à V contiennent les notions de base nécessaires. Les chapitres VI à VIII sont consacrés aux grands théorèmes de structure. Enfin, les chapitres IX à XII sont consacrés aux notions homologiques en théorie des modules. Ce volume pourrait être utilisé comme manuel pour deux cours différents d'un semestre chacun: un cours d'algèbre uon-commutative (basé sur les deux premières parties) et un cours d'algèbre homologique (basé sur la première et la troisième). Le contenu de ce volume n'est en rien original et a paru sous diverses formes dans plusieurs manuels, dont j'ai donné une liste partielle dans la bibliographie. Ma contribution se limite au choix et à la mise en forme du contenu. Conformément à une tendance bien établie dans mon domaine, l'approche choisie est résolument homologique, d'où l'introduction très tôt du langage catégorique. Cela permet d'unifier la présentation et de donner des preuves plus élégantes et intuitives des résultats de base. Je me suis efforcé de conserver à ce volume son caractère initial, celui de notes de cours.

J'ai supposé que le lecteur connaissait déjà les notions d'algèbre ordinairement enseignées au premier cycle dans les universités nord-américaines (voir, par exemple, le premier volume d'"Algebra", par P.M. Cohn, cité dans la bibliographie). En particulier, j'ai supposé qu'il connaissait le théorème fondamental de structure des groupes abéliens de type fini, ainsi qu'une idée de ce qu'est un module sur un anneau commutatif (même si cette notion est reprise depuis le début).

La section V.4 de ce livre n'est utilisée qu'au chapitre VII. Les sections V.3 et V.5 ne sont plus utilisées par la suite et ne sont incluses que pour leur intérêt intrinsèque. La section VII.5 n'est utilisée que pour prouver VIII.6.16 et VIII.6.17, qui ne sont plus utilisés par la suite. La section VIII.4 n'est utilisée que pour prouver V.2.14 qui n'est, de même, plus utilisée par la suite.

Je voudrais remercier tous ceux qui m'ont permis de mener ce travail à bien. Avant tout, je voudrais exprimer ma gratitude à ma femme Luci, qui m'a permis d'utiliser mes vacances pour rédiger ce volume. Je voudrais remercier mes étudiants Daniel Brodeur, Diane Castonguay, James Castonguay, Chantal Gauvreau, Josée Hamel, François Huard et Jessica Lévesque dont les commentaires m'ont permis de grandement améliorer ce texte et de dépister les erreurs qui s'étaient glissées dans une première version. Enfin, je voudrais remercier Sylvie Savage qui s'est acquittée avec compétence et efficacité de la tâche ingrate de dactylographier ce texte, ainsi que l'Université de Sherbrooke pour son soutien financier.

Ibrahim Assem
Sherbrooke, avril 1995

CHAPITRE I

Algèbres.

L'étude de l'algèbre élémentaire se résume à celle des polynômes et des matrices à coefficients dans uu anneau K, que l'on suppose généralement associatif, commutatif et unifère. Ces deux ensembles ont en commun d'être munis d'une structure de K-module ainsi que d'une multiplication K-bilinéaire en faisant ce qu'on appelle des K-algèbres ou algèbres sur K. La structure d'algèbre est uue généralisation naturelle de celle d'anneau: on verra en effet que toute algèbre est en particulier un anneau tandis que, réciproquement, tout anneau peut être considéré comme une algèbre sur son centre (et, en fait, sur tout sous-anneau de son centre). Dans ce chapitre d'introduction, nous définissons la structure d'algèbre, étudious ses propriétés les plus élémentaires, et présentons plusieurs exemples.

1. Structure de K-algèbre.

Nous commençons par rappeler brièvement les définitions d'un anneau commutatif, d'un module et d'une application linéaire. Un *anneau* K est un ensemble muni de deux opérations $K \times K \to K$ notées respectivement $+$ et $\cdot$, et appelées respectivement l'*addition* et la *multiplication* de l'anneau telles que

(1) K muni de l'additiou $(a, b) \mapsto a + b$ est un *groupe abélien*, c'est-à-dire vérifie les axiomes:
  (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ pour tous $a, b, c \in K$.
  (ii) $a + b = b + a$ pour tous $a, b \in K$.
  (iii) Il existe un *élément neutre* 0 ou 0_K pour l'addition de K, c'est-à-dire que pour tout $a \in K$, on a

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

  (iv) À chaque élément $a \in K$ est associé son *opposé*, ou *négatif* $(-a) \in K$ qui satisfait

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

(2) La multiplication $(a,b) \mapsto a \cdot b$ ou ab de K est *doublement distributive* sur l'addition $+$, c'est-à-dire que l'on a

$$a(b+c) = ab + ac$$

et

$$(b+c)a = ba + ca$$

pour tous $a, b, c \in K$.

Dans ces notes, on supposera toujours que K est un anneau *associatif* et *unifère*, c'est-à-dire que la multiplication de K satisfait les axiomes:

(i) $a(bc) = (ab)c$ pour tous $a, b, c \in K$.

(ii) Il existe un *élément neutre* 1 ou 1_K pour la multiplication de K, c'est-à-dire que pour tout $a \in K$, on a

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

En d'autres termes, K muni de sa multiplication est un *monoïde.*

L'élément 0 est appelé le *zéro* de K, l'élément 1 son *identité.* Si la multiplication de K est commutative, on dit que K est un *anneau commutatif.* Si tout élément non nul de K admet un inverse pour la multiplication, on dit que K est un *corps commutatif.* Par la suite, et sauf mention expresse du contraire, la lettre K désignera toujours un anneau commutatif. On peut donc par exemple prendre K égal à $\mathbb{Z}$ (anneau des entiers), ou encore à un corps commutatif tel que $\mathbb{Q}$ (corps des rationnels), $\mathbb{R}$ (corps des réels) ou $\mathbb{C}$ (corps des complexes).

Un anneau qui n'est pas commutatif et dans lequel tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication est appelé un *corps gauche.*

Étant donné un anneau commutatif K, un *K-module* M est un ensemble muni de deux opérations, la première $M \times M \to M$ étant notée $+$ et appelée l'*addition*, et la seconde $M \times K \to M$ étant notée $\cdot$ et appelée la *multiplication externe (à droite)*, telles que:

(1) M muni de l'addition $(x,y) \mapsto x + y$ est un groupe abélien, c'est-à-dire vérifie les axiomes:
   (i) $x + (y+z) = (x+y) + z$ pour tous $x, y, z \in M$.
   (ii) $x + y = y + x$ pour tous $x, y \in M$.
   (iii) Il existe un *élément neutre* 0 ou 0_M pour l'addition, c'est-à-dire que pour tout $x \in M$, on a

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

   (iv) À chaque élément $x \in M$ est associé son *opposé*, ou *négatif* $(-x) \in M$ qui satisfait

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(2) M muni de la multiplication $(x,a) \mapsto x \cdot a$ ou xa vérifie les axiomes:
   (i) $x(ab) = (xa)b$ pour tous $x \in M$ et $a, b \in K$ (*associativité mixte*).
   (ii) $x \cdot 1 = x$ pour tout $x \in M$.

(3) La multiplication externe est doublement distributive sur l'addition, c'est-à-dire que l'on a
   (i) $x(a+b) = xa + xb$ pour tous $x \in M$ et $a, b \in K$.

(ii) $(x+y)a = xa + ya$ pour tous $x, y \in M$ et $a \in K$.

Si $K = \mathbb{Z}$, un K-module n'est donc autre qu'un groupe abélien, tandis que si K est un corps commutatif, un K-module est un K-espace vectoriel. Pour deux K-modules M et N, une application $f : M \to N$ est dite *K-linéaire* (ou *homomorphisme de K-modules*, ou encore *morphisme de K-modules*) si, pour tous $x, y \in M$ et $a, b \in K$, on a

$$f(xa + yb) = f(x)a + f(y)b.$$

Après ce bref rappel, nous en venons à la définition d'algèbre.

DÉFINITION. On appelle *K-algèbre* (ou *algèbre sur K*, ou simplement *algèbre* lorsqu'aucune confusion n'est à craindre) nn ensemble A muni de deux opérations internes, la première étant notée $+$ et appelée l'*addition*, et la seconde étant notée $\cdot$ et appelée la *multiplication*, ainsi que d'une *multiplication externe (à droite)* $A \times K \to A$, également notée $\cdot$ et telles que:

(1) A muni de son addition $(a, b) \mapsto a + b$ et de sa multiplication externe $(a, \alpha) \mapsto a \cdot \alpha$ ou $a\alpha$ est doté d'une structure de K-module (à droite) c'est-à-dire vérifie les axiomes:
  (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ pour tous $a, b, c \in A$.
  (ii) $a + b = b + a$ pour tous $a, b \in A$.
  (iii) Il existe un *élément neutre* 0 ou 0_A pour l'addition, c'est-à-dire que pour tout $a \in A$, on a
  $$a + 0 = 0 + a = a.$$
  (iv) À chaque élément $a \in A$ est associé son *opposé*, ou *négatif* $(-a) \in A$ qui satisfait
  $$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$
  (v) $a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta$ pour tous $a \in A$ et $\alpha, \beta \in K$.
  (vi) $a \cdot 1 = a$ pour tout $a \in A$.
  (vii) $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$ pour tous $a, b \in A$ et $\alpha \in K$.
  (viii) $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$ pour tous $a \in A$ et $\alpha, \beta \in K$.

(2) A muni de sa multiplication $(a, b) \mapsto a \cdot b$ ou ab satisfait les propriétés suivantes:
  (i) $a(b + c) = ab + ac$ pour tous $a, b, c \in A$.
  (ii) $(a + b)c = ac + bc$ pour tous $a, b, c \in A$.
  (iii) $(ab)\alpha = a(b\alpha) = (a\alpha)b$ pour tous $a, b \in A$ et $\alpha \in K$.

En d'autres termes, A est à la fois un K-module et un anneau, et le dernier axiome (2)(iii) exprime que ces deux structures sont compatibles.

L'anneau K étant commutatif, une K-algèbre A est aussi munie canoniquement d'une structure de K-module à gauche: en effet, on définit une multiplication à gauche $K \times A \to A$ par $(\alpha, a) \mapsto a\alpha$ pour tous $a \in A$ et $\alpha \in K$. On dira simplement que A est un K-module.

Lorsque le produit de A admet une identité, c'est-à-dire s'il existe un élément 1 ou 1_A dans A tel que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ pour tout $a \in A$, on dit que A est une *K-algèbre unifère*. Lorsque le produit de A est associatif, c'est-à-dire si $a(bc) = (ab)c$ pour tous $a, b, c \in A$, on dit que A est une *K-algèbre associative*.

Enfiu, lorsque le produit de A est commutatif, c'est-à-dire si $ab = ba$ pour tous $a, b \in A$, on dit que A est une *K-algèbre commutative.*

Notre objectif est l'étude des algèbres associatives et unifères. Par la suite, le terme "algèbre" désignera donc toujours une algèbre associative et unifère.

On voit de suite que l'anneau de base K, ainsi que l'anneau $K[t]$ des polynômes à une indéterminée t à coefficients dans K, sont des exemples de K-algèbres. De même, l'ensemble à un élément $\{0\}$ est évidemment muni d'une structure de K-algèbre, dite *triviale.* Ces trois exemples sont des exemples de K-algèbres commutatives. Nous verrons plus loin plusieurs autres exemples d'algèbres, commutatives ou pas.

Une K-algèbre étant en particulier un anneau et un K-module, toute propriété arithmétique propre à une de ces structures est aussi valable dans une K-algèbre. On a ainsi, dans une K-algèbre A:

(i) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ pour tous $a, b \in A$.
(ii) $(-a)(-b) = ab$ pour tous $a, b \in A$.
(iii) $a(b-c) = ab - ac$ et $(a-b)c = ac - bc$ pour tous $a, b, c \in A$.
(iv) $0_A \cdot a = a \cdot 0_A = 0_A$ pour tout $a \in A$, et $0_A \cdot \alpha = 0_A$ pour tout $\alpha \in K$.
(v) $a \cdot 0_K = 0_A$ pour tout $a \in A$.
(vi) $a \cdot (-\alpha) = (-a) \cdot \alpha = -(a\alpha)$ pour tous $a \in A$ et $\alpha \in K$.
(vii) Si $(\alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et $(\beta_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ sont deux familles d'éléments de K et $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et $(b_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ sont deux familles d'éléments de A telles que les familles $(a_\lambda \alpha_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et $(b_\sigma \beta_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ d'éléments de A sont *à support fini* (c'est-à-dire telles que les ensembles $\{\lambda \in \Lambda \mid a_\lambda \alpha_\lambda \neq 0\}$ et $\{\sigma \in \Sigma \mid b_\sigma \beta_\sigma \neq 0\}$, respectivement, sont finis), alors on a les formules générales de distributivité:

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \alpha_\lambda\right) \left(\sum_{\sigma \in \Sigma} b_\sigma \beta_\sigma\right) = \sum_{(\lambda, \sigma) \in \Lambda \times \Sigma} (a_\lambda b_\sigma)(\alpha_\lambda \beta_\sigma).$$

Les démonstrations des propriétés précédentes sont élémentaires et peuvent être laissées au lecteur. Une remarque importante doit être faite au sujet de (vii). Chaque fois que nous considérerons une somme de la forme $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$, il sera nécessaire de spécifier que la famille $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est à support fini, c'est-à-dire telle que l'ensemble $\{\lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \neq 0\}$ est fini (ou, ce qui revient au même, telle que tous les x_λ sauf au plus un nombre fini sont nuls). Cette condition est en effet nécessaire pour que la somme $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ ait un sens.

Si K est un corps commutatif, toute K-algèbre A est en particulier un K-espace vectoriel. On peut donc parler de sa *dimension,* notée $\dim_K A$, et qui est définie comme étant la cardinalité d'une base du K-espace vectoriel A. L'algèbre A est dite *de dimension finie* si $\dim_K A < \infty$. Si $\dim_K A = n < \infty$ et $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base du K-espace vectoriel A, il existe une famille unique $\{\gamma_{ij}^k \mid 1 \leq i, j, k \leq n\}$ d'éléments de K tels que, pour chaque paire (i, j) avec $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k.$$

Les γ_{ij}^k sont appelées les *constantes de structure* de l'algèbre A par rapport à la base donnée $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, et les relations précédentes constituent la *table de multiplication* de A (relativement à cette base). Réciproquement, toute K-algèbre de dimension n peut être réalisée, à un isomorphisme près (la notion, par ailleurs évidente, d'isomorphisme d'algèbres est définie rigoureusement dans la section 2), par un choix des γ_{ij}^k. Il s'ensuit que, pour tout corps commutatif K et tout nombre naturel $n \geq 1$, le nombre cardinal de l'ensemble des classes d'isomorphisme de K-algèbres de dimension n est plus petit ou égal à $(\mathrm{card}\, K)^{n^3}$. En particulier, il est fini si K est un corps fini. Notons, pour terminer, que les constantes de structure ne sont pas arbitraires: en effet, les relations d'associativité $e_i(e_j e_k) = (e_i e_j)e_k$ impliquent que l'on a, pour tous i, j, k et m

$$\sum_{\ell=1}^{n} \gamma_{ij}^{\ell} \gamma_{\ell k}^{m} = \sum_{\ell=1}^{n} \gamma_{jk}^{\ell} \gamma_{i\ell}^{m}.$$

Afin d'éclaircir la relation entre une K-algèbre A et son anneau de base K, nous allons montrer que la donnée d'une structure de K-algèbre sur un anneau A équivaut à la donnée d'un homomorphisme d'anneaux de K dans le *centre* $Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba \text{ pour tout } b \in A\}$ de A. On rappelle que, si K, K' sont deux anneaux, une application $\varphi : K \to K'$ est un *homomorphisme d'anneaux* si $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$, $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ pour tous $\alpha, \beta \in K$ et $\varphi(1_K) = 1_{K'}$.

PROPOSITION 1.1. *(i) Soit A une K-algèbre. L'application $\varphi : K \to A$ définie par $\varphi : \alpha \mapsto 1_A \cdot \alpha$ (pour $\alpha \in K$) est un homomorphisme d'anneaux dont l'image est contenue dans le centre $Z(A)$ de A.*

(ii) Soient A un anneau et $\varphi : K \to Z(A)$ un homomorphisme. La multiplication externe $A \times K \to A$ définie par $(a, \alpha) \mapsto a\varphi(\alpha)$ (pour $a \in A$, $\alpha \in K$) confère à A une structure de K-algèbre.

DÉMONSTRATION. (i) Il est facile de vérifier que φ est un homomorphisme d'anneaux. Pour prouver que $\varphi(\alpha) \in Z(A)$ pour tout $\alpha \in K$, prenons un $a \in A$ arbitraire, alors

$$\begin{aligned} a\varphi(\alpha) &= a\,(1_A \cdot \alpha) \\ &= (a\alpha) \cdot 1_A \\ &= a\alpha \\ &= 1_A \cdot (a\alpha) \\ &= (1_A\alpha) \cdot a \\ &= \varphi(\alpha)a. \end{aligned}$$

Le lecteur notera qu'à la seconde et à la cinquième égalités, on a utilisé la compatibilité des multiplications interne et externe de A.

(ii) Il est facile de vérifier que la multiplication externe donnée définit bien une structure de K-module. Il reste à montrer la compatibilité de cette structure avec la structure d'anneau de A. Soient donc $a, b \in A$ et $\alpha \in K$. On a

$$\begin{aligned} a(b\alpha) &= a\,(b\varphi(\alpha)) \\ &= a\,(\varphi(\alpha)b) \\ &= (a\varphi(\alpha))\,b \\ &= (a\alpha)b \end{aligned}$$

puisque $\varphi(\alpha) \in Z(A)$. De même

$$\begin{aligned} (ab)\alpha &= (ab)\varphi(\alpha) \\ &= a\,(b\varphi(\alpha)) \\ &= a(b\alpha). \quad \square \end{aligned}$$

Par exemple, l'anneau commutatif $\mathbb{Z}_n$ des entiers modulo n est une $\mathbb{Z}$-algèbre: on prend l'homomorphisme $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ défini par $a \mapsto \bar{a}$, la classe de a modulo n.

Comme, avec les hypothèses de la proposition, on a $\varphi(0_K) = 0_A$ et $\varphi(1_K) = 1_A$, on peut identifier les zéros de K et de A, ainsi que leurs identités. On notera simplement 0 et 1, respectivement, ce zéro et cette identité.

Il suit évidemment de la proposition que tout anneau A est une $\mathbb{Z}$-algèbre (on définit $\varphi : \mathbb{Z} \to Z(A)$ par $n \mapsto n1_A$), et encore que tout anneau est une algèbre sur (tout sous-anneau de) son centre. Observons également que si K est un corps, alors $\varphi : K \to A$ est nécessairement injective et donc K peut être identifié à un sous-anneau de A.

Afin d'énoncer les définitions suivantes, on rappelle que, si M est un K-module, une partie $N \subseteq M$ en est un *sous-module* si N est elle-même un module pour les opérations héritées de M.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. Une *sous-algèbre* B de A est un sous-K-module de A, stable ponr la multiplication de A, et contenant l'identité de A.

En effet, la multiplication de A induit alors, par restriction à $B \times B$, une structure de K-algèbre sur B.

Il est clair que toute intersection de sous-algèbres de A est une sous-algèbre de A. L'intersection des sous-algèbres de A contenant une partie donnée $X \subseteq A$ est donc une sous-algèbre, dite *engendrée* par X. D'autre part, si A est commutative, il en est de même de toute sous-algèbre de A.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. Un *idéal à droite* (ou *à gauche*) I de A est un sous-K-module de A tel que $x \in I$ et $a \in A$ entraînent $xa \in I$ (ou $ax \in I$ respectivement). Un *idéal bilatère* I de A est une partie qui est à la fois un idéal à droite et un idéal à gauche.

Considérant un anneau comme une $\mathbb{Z}$-algèbre, on a là les définitions classiques d'idéal à droite, à gauche, et bilatère d'un anneau. Il est important de remarquer que pour toute K-algèbre A, la notion d'idéal à droite (ou à gauche, ou bilatère) de l'anneau A coïncide avec la notion d'idéal à droite (ou à gauche, ou bilatère) de l'algèbre A: en effet, cela suit de ce que, pour $\alpha \in K$ et $a \in A$, on a

$$a\alpha = a(1 \cdot \alpha) = (1 \cdot \alpha)a.$$

Les idéaux (bilatères) 0 et A d'une K-algèbre A sont parfois dits *impropres* (tout autre idéal étant alors dit *propre*). Si $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille d'idéaux à droite (ou à gauche, ou bilatères) de A, il en est de même de leur intersection $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ et de leur *somme* $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ (laquelle est, par définition, l'ensemble des sommes $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ avec $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments de A à support fini telle que $x_\lambda \in I_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$). L'intersection des idéaux à droite (ou à gauche, ou bilatères) contenant une partie donnée $X \subseteq A$ est donc un idéal à droite (ou à gauche, ou bilatère, respectivement) dit *engendré par* X et noté $\langle X \rangle$. Soient I, J deux idéaux bilatères de A. L'ensemble IJ des sommes $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda y_\lambda$ (où $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ et $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sont respectivement des familles d'éléments de I et J telles que $(x_\lambda y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ soit à support fini) est un idéal bilatère de A, appelé *produit* de I et J.

EXEMPLES 1.2. (a) Soit $K = \mathbb{R}$. Deux exemples importants de $\mathbb{R}$-algèbres sont les suivauts. L'algèbre $\mathbb{C}$ des complexes est la $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 2 munie d'une base $\{1, i\}$ telle que $i^2 = -1$. L'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions d'Hamilton est la $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4 munie d'une base $\{1, i, j, k\}$ telle que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Notons qu'alors que $\mathbb{C}$ est commutative, $\mathbb{H}$ ne l'est pas.

(b) Soit A une K-algèbre. On note $M_n(A)$ l'ensemble des $n \times n$ matrices à coefficients dans A. Si on munit $M_n(A)$ des opérations matricielles ordinaires, on vérifie de suite que $M_n(A)$ est une K-algèbre. Uu rôle particulier est joué par les matrices $\mathbf{e}_{ij} \in M_n(A)$ définies par la condition que $\mathbf{e}_{ij}$ admet pour coefficient 1 à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, et 0 partout ailleurs. En effet, si $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in M_n(A)$, alors

$$\mathbf{a} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{e}_{ij} a_{ij}$$

(toute matrice est une combinaison linéaire des $\mathbf{e}_{ij}$, à coefficients dans A). On vérifie d'autre part de suite que l'on a

$$\mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{kl} = \begin{cases} \mathbf{e}_{il} & \text{si } j = k, \\ \mathbf{0} & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

(où $\mathbf{0}$ désigne la matrice nulle).

Soit A un corps, peut-être gauche. Alors $\{\mathbf{e}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ est évidemment une base de $M_n(A)$ en tant que A-espace vectoriel. On a donc $\dim_A M_n(A) = n^2$. En outre, dans ce cas, $M_n(A)$ est une *K-algèbre simple*, c'est-à-dire n'admettant pas d'idéal bilatère propre. Soit en effet I un idéal bilatère de $M_n(A)$. On suppose $I \neq 0$ et on veut montrer que $I = M_n(A)$. Prenons $\mathbf{a} = [a_{kl}] \in M_n(A)$.

Comme $I \neq 0$, il existe $0 \neq \mathbf{b} = [b_{kl}] \in I$. Supposons $b_{rs} \neq 0$. Pour toute paire (i, j) avec $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$\mathbf{e}_{ij} = (\mathbf{e}_{ir}\mathbf{b}\mathbf{e}_{sj})\, b_{rs}^{-1} \in I$$

(puisque I est un idéal bilatère). Par conséquent

$$\mathbf{a} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{e}_{ij} a_{ij} \in I.$$

Par contre, si $n > 1$, l'algèbre $M_n(A)$ admet des idéaux à droite (ou à gauche) propres: en effet, pour tout $1 \leq i \leq n$, l'idéal à droite $\mathbf{e}_{ii}M_n(A) = \{\mathbf{e}_{ii}\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in M_n(A)\}$ est évidemment propre. De même, l'idéal à gauche $M_n(A)\mathbf{e}_{ii}$ est propre.

(c) La partie $T_n(A)$ de $M_n(A)$ définie par $T_n(A) = \{\mathbf{a} = [a_{ij}] \in M_n(A) \mid a_{ij} = 0 \text{ pour } j > i\}$ est une sous-algèbre de $M_n(A)$, dite *algèbre des matrices triangulaires inférieures*. Un autre exemple de sous-algèbre de $M_n(A)$, dans le cas $n = 3$, est fourni par l'ensemble

$$B = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ A & A & A \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & d & e \end{bmatrix} \middle| a, \ldots, e \in A \right\}$$

muni des opérations matricielles ordinaires. En fait, B est aussi une sous-algèbre de $T_3(A)$.

(d) Soit E un ensemble fini partiellement ordonné par $\leq$. L'*algèbre d'incidence* KE de E est l'ensemble des combinaisons linéaires des paires $(i, j) \in E \times E$ avec $j \leq i$, à coefficients dans K, où le produit de deux telles paires est défini par

$$(i, j)(k, l) = \begin{cases} (i, l) & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

et se prolonge aux autres éléments de KE par distributivité. Il est par exemple immédiat (en comparant avec (1.2)(b) plus haut) que si $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ est ordonné par l'ordre naturel, alors KE est isomorphe à l'algèbre $T_n(K)$.

(e) Soit G un groupe fini. L'*algèbre du groupe* KG est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de G à coefficients dans K, où le produit de $g \in G$ par $h \in G$ est leur produit gh dans G, et se prolonge aux autres éléments de KG par distributivité. En d'autres termes, si $\sum_{g \in G} g\alpha_g$ et $\sum_{h \in G} h\beta_h$ sont deux éléments de KG, on a

$$\left(\sum_{g \in G} g\alpha_g\right)\left(\sum_{h \in G} h\beta_h\right) = \sum_{f = gh} f\alpha_g\beta_h.$$

(f) Soit M un K-module. L'ensemble $\operatorname{End}_K M$ des applications K-linéaires de M dans lui-même (ou *endomorphismes* de M) admet une structure de K-algèbre pour les opérations suivantes

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$$
$$(fg)(x) = f(g(x))$$

pour tous $f, g \in \operatorname{End}_K M$, $x \in M$ et $\alpha \in K$. L'identité de $\operatorname{End}_K M$ est l'application identique $1_M : x \mapsto x$ (pour $x \in M$). On définit sur M une multiplication externe (à gauche) $\operatorname{End}_K M \times M \to M$ par$(f, x) \mapsto f(x)$ (l'évaluation). Cette multiplication confère à M une structure de $\operatorname{End}_K M$-module à gauche, laquelle est compatible avec la structure de K-module à droite

$$f(x\alpha) = f(x)\alpha = (f(x))\alpha$$

(pour $x \in M$, $f \in \operatorname{End}_K M$, $\alpha \in K$) puisque f est K-linéaire.

(g) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des K-algèbres. L'ensemble produit

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

admet une structure de K-algèbre pour les opérations suivantes

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,\alpha = (a_1\alpha, a_2\alpha, \ldots, a_n\alpha)$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$$

pour tous $a_i, b_i \in A_i$ (où $1 \leq i \leq n$) et $\alpha \in K$. On dit que $\prod_{i=1}^{n} A_i$ est l'*algèbre produit* de $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

(h) Soient A une K-algèbre et I un idéal bilatère de A. Il est facile de voir que l'ensemble A/I des classes résiduelles modulo I de la forme $a + I = \{a + x \mid x \in I\}$ (où $a \in A$) est muni d'une structure canonique de K-module par

$$(a+I)\alpha + (b+I)\beta = (a\alpha + b\beta) + I$$

(pour tous $a, b \in A$ et $\alpha, \beta \in K$) et d'une structure canonique d'anneau par

$$(a+I)(b+I) = ab + I$$

(pour tous $a, b \in A$). Il se fait que ces deux structures sont compatibles, en effet, si $a, b \in A$ et $\alpha \in K$, on a

$$\begin{aligned}((a+I)(b+I))\,\alpha &= (ab+I)\alpha \\ &= (ab)\alpha + I \\ &= a(b\alpha) + I \\ &= (a+I)(b\alpha + I).\end{aligned}$$

De même, $(a+I)(b\alpha+I) = (a\alpha+I)(b+I)$. Par conséquent, A/I est muni d'une structure canonique de K-algèbre. On dit que A/I est l'*algèbre quotient* de A par I.

(i) À toute algèbre A correspond son *algèbre opposée* A^{op} qui est mnnie de la même structure de K-module que A (en particulier a le même ensemble sous-jacent), mais dont la multiplication $*$ est définie par $a * b = ba$ (pour tous $a, b \in A$). Il est clair que A est commutative si et seulement si elle coïncide avec son opposée.

Il existe bien entendu beaucoup d'autres exemples. Nous en verrons quelques-uns en exercices.

2. Morphismes d'algèbres.

DÉFINITION. Soient A, B deux K-algèbres. Un *morphisme*, ou *homomorphisme, de K-algèbres* de A dans B est une application $\varphi : A \to B$ telle que:

(i) $\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$
(ii) $\varphi(a\alpha) = \varphi(a)\alpha$
(iii) $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$
(iv) $\varphi(1) = 1$

pour tous $a_1, a_2 \in A$ et $\alpha \in K$.

En d'autres termes, φ est un morphisme de K-algèbres si et seulement si φ est K-linéaire et est un homomorphisme d'anneaux. Si A est une K-algèbre, un morphisme d'algèbres $\varphi : A \to A$ est parfois appelé un *endomorphisme* de A. Il est clair que l'identité $1_A : A \to A$ est un morphisme d'algèbres, et qne la composition de deux morphismes $\varphi : A \to B$ et $\psi : B \to C$ de K-algèbres est aussi un morphisme de K-algèbres de A dans C, que l'on note $\psi\varphi$ ou $\psi \circ \varphi$.

DÉFINITION. Un morphisme de K-algèbres $\varphi : A \to B$ est appelé un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $\psi : B \to A$ tel que $\varphi \circ \psi = 1_B$ et $\psi \circ \varphi = 1_A$. Les algèbres A et B sont alors dites *isomorphes*, ce que l'on note $A \xrightarrow{\sim} B$.

On note que, si $\varphi : A \to B$ et $\psi : B \to A$ sont comme dans la définition précédente, alors ψ est anssi un isomorphisme et est uniquement déterminé par φ: en effet, si $\psi', \psi'' : B \to A$ sont des morphismes d'algèbres tels que $\psi'\varphi = 1_A$ et $\varphi\psi'' = 1_B$, alors

$$\psi' = \psi' 1_B = \psi'(\varphi\psi'') = (\psi'\varphi)\psi'' = 1_A\psi'' = \psi''.$$

L'isomorphisme $\psi : B \to A$ est alors appelé l'*isomorphisme inverse* ou *réciproque* de φ.

On vérifie de suite que la composition de deux isomorphismes est un isomorphisme. Par conséquent, la relation $\xrightarrow{\sim}$ est réflexive, symétrique et transitive. Un isomorphisme de A avec elle-même est parfois appelé un *automorphisme.*

LEMME 2.1. *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme de K-algèbres. Alors φ est un isomorphisme si et seulement si φ est bijectif.*

DÉMONSTRATION. La nécessité étant évidente, montrons la suffisance. Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme bijectif. Pour montrer que φ est un isomorphisme, il faut et il suffit de montrer que l'application réciproque $\varphi^{-1} : B \to A$ est un morphisme d'algèbres. Or on a, par exemple, pour $b_1, b_2 \in B$,

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(b_1)\,\varphi^{-1}(b_2)\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(b_1)\right)\varphi\left(\varphi^{-1}(b_2)\right) = b_1 b_2$$

et donc $\varphi^{-1}(b_1)\,\varphi^{-1}(b_2) = \varphi^{-1}(b_1 b_2)$. Les autres propriétés se vérifient de même. $\square$

EXEMPLES 2.2. (a) Soient A, B deux K-algèbres, avec B une sous-algèbre de A. L'inclusion $\iota : B \to A$, définie par $b \mapsto b$ (pour $b \in B$) est un morphisme, appelé *inclusion* ou *injection canonique*.

(b) Soient A une K-algèbre et I un idéal bilatère de A. L'application $\pi : A \to A/I$, définie par $a \mapsto a + I$ (pour $a \in A$) est un morphisme, appelé *projection* ou *surjection canonique*.

Un morphisme de K-algèbres $\varphi : A \to B$ n'étant autre qu'un homomorphisme d'anneaux qui est aussi K-linéaire, les propriétés suivantes sont vérifiées:

(i) $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$ est une sous-algèbre de B.
(ii) $\varphi(0) = 0$.
(iii) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ pour tout $a \in A$.
(iv) Si A est commutative, $\operatorname{Im}\varphi$ l'est aussi.
(v) Le noyau $\operatorname{Ker}\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ est un idéal bilatère de A.
(vi) Le morphisme φ est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi = 0$.

Les démonstrations de ces propriétés sont élémentaires et peuvent être laissées au lecteur.

Nous en arrivons aux théorèmes d'isomorphisme.

Nous aurons besoin de la convention suivante: si par la suite un énoncé affirme l'existence d'une application complétant un diagramme, celle-ci sera représentée en pointillé sur le même diagramme (c'est le cas pour le morphisme $\overline{\varphi}$ dans le théorème suivant).

THÉORÈME 2.3. *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme de K-algèbres. Il existe un unique morphisme $\overline{\varphi} : A/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}"] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire tel que $\varphi = \iota\overline{\varphi}\pi$. Ici, $\iota : \operatorname{Im}\varphi \to B$ désigne l'inclusion et $\pi : A \to A/\operatorname{Ker}\varphi$ la projection canoniques. En outre, $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme (et donc $A/\operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}\varphi$).

DÉMONSTRATION. Posons $I = \operatorname{Ker}\varphi$. Un élément de A/I est de la forme $a + I = \pi(a)$, où $a \in A$. On doit donc avoir

$$\overline{\varphi}(a + I) = \overline{\varphi}\pi(a) = (\iota\overline{\varphi}\pi)(a) = \varphi(a).$$

Ceci montre l'unicité de $\overline{\varphi}$. Son existence vient du fait que la formule précédente définit bien une application $A/I \to \operatorname{Im}\varphi$: en effet, $a + I = b + I$ implique $a - b \in I$

et donc $\varphi(a-b) = 0$ (car $I = \operatorname{Ker}\varphi$), par conséquent $\varphi(a) = \varphi(b)$. Il est facile de vérifier que $\overline{\varphi}$ est bien un morphisme d'algèbres.

Comme il est clair que $\overline{\varphi}$ est surjectif, montrons qu'il est injectif. Si $\overline{\varphi}(a+I) = 0$, alors $\varphi(a) = 0$. Par conséquent, $a \in I$ et donc $a + I = I$. $\square$

En particulier, si $\varphi : A \to B$ est un morphisme surjectif, alors $\iota = 1_B$ et donc $\overline{\varphi}$ définit un isomorphisme d'algèbres $A/\operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{\sim} B$.

Le second théorème est une application directe du premier. Notons que si B est une sous-algèbre d'une K-algèbre A et I est un idéal bilatère de A, l'ensemble

$$B + I = \{b + x \mid b \in B,\ x \in I\}$$

est une sous-algèbre de A, dont I est un idéal bilatère. D'autre part, $B \cap I$ est un idéal bilatère de B. Les démonstrations de ces énoncés sont triviales et laissées au lecteur.

THÉORÈME 2.4. *Soient A une K-algèbre, B une sous-algèbre et I un idéal bilatère de A. On a un isomorphisme de K-algèbres*

$$(B + I)/I \xrightarrow{\sim} B/(B \cap I).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit, d'après (2.3), de construire un morphisme surjectif $\varphi : B + I \to B/(B \cap I)$ dont le noyau est I. Posons, pour $b \in B$ et $x \in I$,

$$\varphi(b + x) = b + B \cap I.$$

Il faut vérifier que cette définition n'est pas ambigüe. Or $b + x = b' + x'$ (avec $b, b' \in B$ et $x, x' \in I$) implique $b - b' = x' - x \in (B \cap I)$ et donc $b + (B \cap I) = b' + (B \cap I)$. On vérifie de suite que φ est un morphisme. Enfin, comme $\varphi(b + x) = B \cap I$ si et seulement si $b \in (B \cap I) \subseteq I$ si et seulement si $b + x \in I$, on a bien $\operatorname{Ker}\varphi = I$. $\square$

Une autre preuve de (2.4) partirait du morphisme $\psi : B \to (B + I)/I$ donné par $b \mapsto b + I$, et consisterait à vérifier que ψ est un morphisme surjectif de noyau $B \cap I$.

THÉORÈME 2.5. *Soient A une K-algèbre, I, J deux idéaux bilatères de A tels que $I \subseteq J$. Il existe un unique morphisme $\varphi : A/I \to A/J$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\pi_I"'] \arrow[dr, "\pi_J"] & \\ A/I \arrow[rr, dashed, "\varphi"] & & A/J \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire tel que $\varphi\pi_I = \pi_J$. Ici, π_I et π_J désignent les projections canoniques respectives. En outre, φ est surjectif et son noyau est l'idéal bilatère J/I de A/I. Il induit donc un isomorphisme de K-algèbres $(A/I)\,/\,(J/I) \xrightarrow{\sim} A/J$.

DÉMONSTRATION. Un élément de A/I est de la forme $a + I = \pi_I(a)$ (où $a \in A$). On doit donc avoir

$$\varphi(a + I) = \varphi\pi_I(a) = \pi_J(a) = a + J.$$

Ceci montre l'unicité de φ. Son existence vient du fait que la formule précédente définit bien une application $A/I \to A/J$: en effet, $a + I = b + I$ implique $a - b \in I \subseteq J$ et donc $a + J = b + J$. On vérifie facilement que φ est un morphisme d'algèbres.

Comme il est clair que φ est surjectif, calculons son noyau. On a $a+I \in \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si $a + J = J$, c'est-à-dire $a \in J$ et donc $a + I \in J/I$. Cela montre que $\operatorname{Ker}\varphi = J/I$. Le dernier énoncé suit de (2.3). □

THÉORÈME 2.6. *Soient A une K-algèbre, I un idéal bilatère de A et $\pi : A \to A/I$ la projection canonique. L'application $J \mapsto \pi(J)$ est une bijection croissante de l'ensemble ordonné par inclusion des idéaux à droite (ou à gauche, ou bilatères) de A contenant I sur l'ensemble des idéaux à droite (ou à gauche, ou bilatères, respectivement) de A/I. La bijection réciproque est π^{-1}.*

DÉMONSTRATION. Soit J un idéal à droite de A contenant I. Il est clair que $\pi(J) = J/I = \{x + I \mid x \in J\}$ est un idéal à droite de A/I. En outre, on a que $\pi^{-1}(\pi(J)) \supseteq J$. Montrons l'inclusion inverse. Un élément $a \in A$ appartient à $\pi^{-1}(\pi(J))$ si et seulement s'il existe $x \in J$ tel que $\pi(a) = \pi(x)$, c'est-à-dire $a - x \in \operatorname{Ker}\pi = I \subseteq J$, par conséquent $a \in J$. Cela montre bien que $\pi^{-1}(\pi(J)) = J$. Réciproquement, si $\overline{J}$ est un idéal à droite de A/J, il est clair que $\pi^{-1}(\overline{J}) = \{x \in A \mid x + I \in \overline{J}\}$ est un idéal à droite de A contenant $I = \pi^{-1}(0)$. D'autre part, π étant surjectif, on a $\pi\left(\pi^{-1}\left(\overline{J}\right)\right) = \overline{J}$.

On montre de même l'énoncé pour les idéaux à gauche ou bilatères. □

On achève sur un exemple classique. Soient K uu corps, et $K[t]$ l'algèbre des polynômes en t. Fixons un scalaire $\lambda \in K$. Le théorème de la division pour les polynômes implique que tout $p \in K[t]$ s'écrit

$$p = (t - \lambda)q + p(\lambda)$$

où $q \in K[t]$ est de degré plus petit que celui de p, et $p(\lambda) \in K$ est l'évaluation du polynôme p en λ. L'application $K[t] \to K$ définie par $p \mapsto p(\lambda)$ est un morphisme de K-algèbres, ainsi qu'il est aisé de le vérifier. Il est surjectif (car tout $\alpha \in K$ est l'image du polynôme constant égal à α) et son noyau est l'idéal de $K[t]$ engendré par $t - \lambda$. Il suit de (2.3) que l'on a $K[t]/\langle t - \lambda\rangle \xrightarrow{\sim} K$. D'autre part, K étant un corps n'a pas d'idéaux propres. Par conséquent, il suit de (2.6) que $K[t]$ n'a pas d'idéaux propres contenant strictement $\langle t - \lambda\rangle$: on exprime ceci en disant que $\langle t - \lambda\rangle$ est uu idéal maximal de $K[t]$ (voir l'exercice 5).

Exercices du Chapitre I.

1. Soit A nne K-algèbre associative et non unifère. On considère l'ensemble

$$\tilde{A} = A \times K = \{(a, \alpha) \mid a \in A, \alpha \in K\}$$

mnni des opérations suivantes:

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$$
$$(a, \alpha)\beta = (a\beta, \alpha\beta)$$
$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + a\beta + b\alpha, \alpha\beta)$$

(où $a, b \in A$ et $\alpha, \beta \in K$). Vérifier que $\tilde{A}$ est une K-algèbre associative admettant $(0, 1)$ comme identité.

2. Soit G un monoïde multiplicatif (c'est-à-dire un ensemble muni d'une opération associative notée multiplicativement et admettant un élément neutre 1). On considère l'ensemble KG des combinaisons linéaires d'éléments de G à coefficients dans K, où le produit de $g_1, g_2 \in G$ dans KG est égal à leur produit g_1g_2 dans G, et se prolonge aux autres éléments de KG par distributivité.

a) Montrer que KG est muni d'une structure de K-algèbre.
b) Soit G le monoïde libre sur t, c'est-à-dire $G = \{t^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ muni de l'opération définie par $t^m \cdot t^n = t^{m+n}$ (pour $m, n \in \mathbb{N}$). Montrer que $KG \xrightarrow{\sim} K[t]$. Le symbole $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n \geq 0$.
c) Soient A une K-algèbre et $\varphi : G \to A$ un morphisme de monoïdes, c'est-à-dire une application telle que $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ (pour $g_1, g_2 \in G$) et $\varphi(1) = 1$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de K-algèbres $\overline{\varphi} : KG \to A$ prolongeant φ, c'est-à-dire tel que $\overline{\varphi}(g) = \varphi(g)$ pour tout $g \in G$.

3. Soit G un groupe cyclique d'ordre $n < \infty$. Montrer que

$$KG \xrightarrow{\sim} K[t]/\langle t^n - 1\rangle.$$

4. Soient K un corps de caractéristique 2 et $G = \{1, g, h, gh\}$ le groupe de Klein. Montrer que le morphisme $\varphi : K[s, t] \to KG$ défini par $\varphi(s) = 1 + g$, $\varphi(t) = 1 + h$ est surjectif de noyau $\langle s^2, t^2\rangle$ et en déduire que

$$KG \xrightarrow{\sim} K[s, t]/\langle s^2, t^2\rangle.$$

5. Soit I un idéal bilatère d'une algèbre A. On dit que I est *maximal* si $I \neq A$ et, pour tout idéal bilatère J tel que $I \subseteq J \subseteq A$, on a $J = I$ ou $J = A$.

a) Montrer que I est maximal si et seulement si A/I est un corps (non nécessairement commutatif).
b) Montrer que toute algèbre admet des idéaux maximaux.

6. Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'idéaux à droite (ou à gauche, ou bilatères) d'une algèbre A. Montrer que $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ est égal à l'idéal à droite (ou à gauche, ou bilatère respectivement) engendré par $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$.

7. Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'idéaux à droite (ou à gauche, ou bilatères) d'une algèbre A, que l'on suppose totalement ordonnée par inclusion (c'est-à-dire telle que, si $\lambda \neq \mu$ on a $I_\lambda \subseteq I_\mu$ ou $I_\mu \subseteq I_\lambda$). Montrer que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ est un idéal à droite (ou à gauche, ou bilatère, respectivement) de A.

8. Soient I, J deux idéaux à droite (ou à gauche, ou bilatères) d'une algèbre A. Montrer que $I \cup J$ est un idéal à droite (ou à gauche, ou bilatère, respectivement) si et seulement si $I \subseteq J$ ou $J \subseteq I$.

9. Soit I un ensemble non vide d'une algèbre A. Montrer que I est un idéal bilatère de A si et seulement si, pour tous $x_1, x_2 \in I$ et $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$, on a $a_1x_1b_1 + a_2x_2b_2 \in I$. Quel est l'énoncé correspondant pour les idéaux à droite?

10. Soit $E = \{1, 2, 3\}$ muni de l'ordre partiel défini par $1 \leq 3$, $2 \leq 3$. Montrer que KE est isomorphe à l'algèbre

$$\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & d & e \end{bmatrix} \middle| a, \ldots, e \in K \right\}.$$

11. Montrer que l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, muni des opérations matricielles ordinaires, est une sous-algèbre de $T_n(K)$, isomorphe à $K[t]/\langle t^n \rangle$.

12. Soient n, m deux entiers tels que m divise n. Montrer que l'on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres

$$\mathbb{Z}_n/m\mathbb{Z}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_m.$$

13. Soit K un corps. Montrer que l'on a un isomorphisme de K-algèbres

$$K[s,t]/\langle s-t \rangle \xrightarrow{\sim} K[t].$$

14. Soient A, B deux K-algèbres, $\varphi : A \to B$ un morphisme, I, J des idéaux bilatères respectifs de A et B tels que $\varphi(I) \subseteq J$. Montrer qu'il existe un unique

morphisme de K-algèbres $\overline{\varphi} : A/I \to B/J$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[d, "\pi'"] \\ A/I \arrow[r, dashed, "\overline{\varphi}"] & B/J \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire tel que $\pi'\varphi = \overline{\varphi}\pi$. Ici, π et π' désignent les projections canoniques respectives.

15. Soient A une K-algèbre et ${}_AM_A$ un $(A - A)$-bimodule (voir (II) Exemple (1.3)(h)). On définit une multiplication sur le K-module $A \oplus M$ par

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + xb)$$

(où $a, b \in A$ et $x, y \in M$). Montrer que:

a) $A \oplus M$ muni de cette loi devient une K-algèbre (appelée *extension triviale* de A par M et notée $A \ltimes M$).
b) Il existe des morphismes de K-algèbres $\sigma : A \to A \ltimes M$ et $\pi : A \ltimes M \to A$ tels que $\pi\sigma = 1_A$.
c) M se plonge en un idéal bilatère $0 \oplus M$ de $A \ltimes M$ et $(0 \oplus M)^2 = 0$.

16. Soient A une K-algèbre commutative et $A[t]$ la K-algèbre (commutative) des polynômes en t à coefficients dans A. Montrer que, pour toute K-algèbre commutative B, tout morphisme $\varphi : A \to B$ et tout élément $b \in B$, il existe un unique morphisme de K-algèbres $\overline{\varphi} : A[t] \to B$ tel que $\overline{\varphi}(a) = \varphi(a)$ pour tout $a \in A$, et $\overline{\varphi}(t) = b$.

17. Soient A, B deux K-algèbres, et $X \subseteq A$ un ensemble de générateurs de A contenant 1. On se donne une application $\varphi : X \to B$ telle que $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ pour tous $x_1, x_2 \in X$; $\varphi(x_1x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)$ pour tous $x_1, x_2 \in X$ et $\varphi(1) = 1$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de K-algèbres $\overline{\varphi} : A \to B$ prolongeant φ.

CHAPITRE II

Modules sur une K-algèbre.

La notion de module est une généralisation aussi fructueuse que naturelle de celles de groupe abélien, de groupe avec opérateurs, d'idéal et d'espace vectoriel. Elle apparaît entre autres en théorie des représentations des groupes finis. Soient K un corps et G un groupe fini. Une représentation K-linéaire de G est par définition un homomorphisme du groupe G dans le groupe des automorphismes d'un K-espace vectoriel. On démontre qne la classification des représentations de G est équivalente à la classificatiou des modules sur l'algèbre du groupe KG (voir (I.1.2)(a)). Or, c'est cette dernière qui s'exprime de la manière la plus élégante. En fait, la notion de représentation est définie de façon semblable pour plusieurs autres structures algébriques, et leur étude se ramène à l'étude de modules sur une algèbre. Notre objectif par la suite sera d'étudier les modules et les applications entre eux. Comme toujours, K désignera un anneau commutatif et toutes nos algèbres seront des K-algèbres.

1. Définition et exemples.

La définition d'un module sur une K-algèbre est identique à celle d'un module sur un anneau. Nous choisissons néanmoins de la détailler à nouveau.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. Un *A-module à droite* est défini par la donnée d'un groupe abélien M, noté additivement, et d'une opération externe $M \times A \to M$ notée $(x, a) \mapsto xa$ et appelée multiplication externe, telles que

(i) $x(ab) = (xa)b$
(ii) $x \cdot 1 = x$
(iii) $x(a + b) = xa + xb$
(iv) $(x + y)a = xa + ya$

pour tous $x, y \in M$ et $a, b \in A$.

Par analogie avec les espaces vectoriels, on appelle parfois les éléments de M des *vecteurs* et ceux de A des *scalaires*.

On définit de même la notion de *A-module à gauche*. On écrira M_A (ou ${}_AM$, respectivement) pour indiquer que M est un A-module à droite (ou à gauche, respectivement). Il existe une façon naturelle de ramener l'étude des modules à gauche à celle des modules à droite et réciproquement: soient en effet A^{op} l'algèbre opposée de A (voir (I.1.2)(i)) et M un A-module à gauche; on définit sur M une structure de A^{op}-module à droite en posant

$$x * a = ax$$

(pour $x \in M$ et $a \in A$). Il suffit en effet de vérifier l'axiome (i) de la définition précédente:

$$x * (a * b) = (a * b)x = (ba)x = b(ax) = (x * a) * b$$

pour $x \in M$ et $a, b \in A$. Cette remarque nous permet de ne considérer par la suite que des A-modules à droite, sauf dans les questions où interviennent simultanément des modules à droite et des modules à gauche. Bien sûr, si A est commutative, la distinction entre module à droite et module à gauche n'est qu'une question d'écriture.

Il suit directement de la définition que tout A-module M est également muni d'une strncture de K-module à droite, par

$$x\alpha = x(1 \cdot \alpha)$$

où $x \in M$, $\alpha \in K$ et 1 désigne l'identité de A. Comme K est commutatif, M est aussi uu K-module à gauche. Notons que, par l'axiome (i) de la définition précédente,

$$(\alpha x)a = \alpha(xa) = x(\alpha a)$$

pour $x \in M$, $\alpha \in K$ et $a \in A$.

Quand nous travaillerons sur un A-module M, deux éléments zéro paraîtront dans nos discussions: le zéro scalaire (celui de A) et le zéro vecteur (celui de M). Nous les noterons tous deux 0, sauf s'il est nécessaire de les distinguer, auquel cas on les notera 0_A et 0_M respectivement. Le module M ne contenant que l'élément 0 est appelé le *module nul* et noté 0. On a les propriétés suivantes:

(i) $x0_A = 0_M$ pour tout $x \in M$.
(ii) $0_M a = 0_M$ pour tout $a \in A$.
(iii) $x(-a) = -(xa) = (-x)a$ pour tous $x \in M$ et $a \in A$.
(iv) Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont deux familles d'éléments de M à support fini, on a

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\right) + \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x_\lambda + y_\lambda)\,.$$

(v) Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille d'éléments de M à support fiui et $a \in A$, on a

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\right) a = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x_\lambda a)\,.$$

Les démonstrations sont faciles et peuvent être laissées au lecteur.

Une définition équivalente de module fait intervenir la notion de représentation d'une algèbre.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. Une *représentation K-linéaire* de A est la donnée d'une paire (M, ρ), où M est un K-module et $\rho : A \to \operatorname{End}_K M$ est un morphisme de K-algèbres.

LEMME 1.1. *Soient A une K-algèbre et M un K-module. La donnée d'une représentation (M, ρ) de A équivaut à la donnée d'une structure de A-module à droite sur M.*

DÉMONSTRATION. Supposons donnée une représentation (M, ρ). Alors $\rho : A \to \operatorname{End}_K M$ est un morphisme d'algèbres. On peut définir une opération externe $M \times A \to M$ par

$$xa = (x)\rho(a)$$

pour $x \in M$ et $a \in A$, où on note l'action des endomorphismes à droite (de sorte que $(x)\rho(a)$ désigne l'image de $x \in M$ par $\rho(a) \in \operatorname{End}_K M$). Il est aisé de vérifier que cela munit M d'une structure de A-module à droite. Réciproquement, si M est un A-module à droite, on définit pour $a \in A$ une application K-linéaire $\rho(a) : M \to M$ par $\rho(a) : x \mapsto xa$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\rho : A \to \operatorname{End}_K M$ est nn morphisme d'algèbres, et c'est immédiat. □

DÉFINITION. Soient A une K-algèbre et M un A-module. Une partie N de M est appelée un *sous-module* de M si N est lui-même un A-module pour les opérations induites de celles de M.

Il est clair que tout A-module M contient deux sous-modules au moins, à savoir 0 et M. Ces deux sous-modules sout parfois dits *impropres*, tout autre sous-module étant alors dit *propre*. On a la caractérisation suivaute.

LEMME 1.2. *Soient A une K-algèbre, M un A-module et N une partie non vide de M. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *N est un sous-module de M.*
(ii) *N est un sous-groupe additif de M et $x \in N$, $a \in A$ entraînent $xa \in N$ (ce que l'on note $NA \subseteq N$).*
(iii) *Pour tous $x, y \in N$ et $a, b \in A$, on a $xa + yb \in N$.*

DÉMONSTRATION. Facile et laissée au lecteur. □

EXEMPLES 1.3. (a) Si A est un corps (peut-être gauche), la notion de module (à droite) se confond avec celle d'espace vectoriel (à droite), celle de sous-module avec celle de sous-espace. La théorie des modules généralise donc celle des espaces vectoriels.

(b) Tout groupe abélien peut être considéré comme un $\mathbb{Z}$-module: si $x \in M$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit en effet xn comme suit: si $n \geq 0$, par récurrence au moyen de $x \cdot 0 = 0$ et $x(n+1) = xn + x$, et si $n < 0$ au moyen de $xn = (-x)(-n)$. La notion de sous-module coïncide alors avec celle de sous-groupe. La théorie des modules généralise donc celle des groupes abéliens.

(c) Soit A une K-algèbre. Le produit de A définit une structure de A-module à droite sur A de façon évidente: l'opération $A \times A \to A$ est donnée par $(a, b) \mapsto ab$ (pour $a, b \in A$). Ce module est noté A_A. Les sous-modules de A_A ne sont autres que les idéaux à droite de A, ainsi qu'il résulte de (1.2). De même, le produit de A induit une structure de A-module à gauche sur A, que l'on note

${}_AA$. Les sous-modules de ${}_AA$ ne sont autres que les idéaux à gauche de A. Il est clair que si A est commutative, ces deux notions coïncident et coïncident avec celle d'idéal bilatère.

(d) Soient K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel et $u : E \to E$ une application linéaire. On donne à E une structure de $K[t]$-module à gauche de la façon suivante: soient $x \in E$ et $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_d t^d$ un élément de $K[t]$, on définit

$$\begin{aligned} p \cdot x &= \left(a_0 1_E + a_1 u + \cdots + a_d u^d\right)(x) \\ &= a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_d u^d(x). \end{aligned}$$

L'étude de cette structure est particulièrement importante pour la description des modules sur les domaines d'intégrité principaux (cette classe importante d'algèbres sera définie en (IV.3)).

(e) Soient A une K-algèbre, $n > 0$ et $A^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in A\}$ le produit de n copies de A (voir (I.1.2)(g)). On donne à A^n une structure de $M_n(A)$-module à droite comme suit: si $x = (x_1, \dots, x_n) \in A^n$ et $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in M_n(A)$, on pose

$$x \cdot \mathbf{a} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} x_i a_{in}\right).$$

(En d'autres termes, le produit $x \cdot \mathbf{a}$ n'est autre que leur produit en tant que matrices.)

(f) Soient A une K-algèbre, M un A-module, et N un sous-module de M. Construisons le groupe abélien quotieut M/N: c'est l'ensemble des classes résiduelles de la forme $x + N = \{x + y \mid y \in N\}$ (où $x \in M$) muni de la loi

$$(x + N) + (x' + N) = (x + x') + N$$

(où $x, x' \in M$). On en fait un A-module eu posant

$$(x + N)a = xa + N$$

(où $x \in M$ et $a \in A$). Cette opération est définie sans ambiguïté, en effet $x + N = x' + N$ entraîne $x - x' \in N$ et donc (comme N est un sous-module de M) on a, pour tout $a \in A$, que $xa - x'a = (x - x')a \in N$ d'où $xa + N = x'a + N$. La vérification (immédiate) des axiomes montre que M/N est un A-module, dit *module quotient* de M par N.

Par exemple, supposons que I est un idéal bilatère de A. On définit MI comme étant l'ensemble des sommes $\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda a_\lambda$, où $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille d'éléments de M, $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments de I telles que $(x_\lambda a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ soit à support fini. On voit de suite que MI est un sous-module de M. On peut donc former le A-module quotient M/MI comme plus haut. En outre, M/MI admet une structure naturelle de A/I-module définie par

$$(x + MI)(a + I) = xa + MI$$

(où $x \in M$ et $a \in A$).

(g) Soient A, B deux K-algèbres et $\varphi : A \to B$ un morphisme. Alors tout B-module admet une structure naturelle de A-module: en effet, on définit une multiplication des éléments de M_B par ceux de A au moyen de

$$xa = x\varphi(a)$$

(où $x \in M$ et $a \in A$). On dit alors que la structure de A-module de M est induite de celle de B-module par *changement des scalaires.* Il existe deux cas particuliers importants. Le premier est celui où A est une sous-algèbre de B et φ est l'inclusion. Le second est celui où $B = A/I$, pour un idéal bilatère I de A et $\varphi : A \to A/I$ est la projection canonique: dans ce second cas, l'action de A sur le A/I-module M est dounée par $xa = x(a + I)$ (où $x \in M$, $a \in A$).

(h) Soient A, B deux K-algèbres. Un ensemble M muni à la fois d'une structure de A-module à gauche et d'une structure de B-module à droite est un $(A - B)$-*bimodule* si ces deux structures sont compatibles, c'est-à-dire si

$$a(xb) = (ax)b$$

pour $a \in A, x \in M$ et $b \in B$. On note alors ${}_AM_B$. Par exemple, tout A-module à droite est un $(K-A)$-bimodule. Tout idéal bilatère de A est un $(A-A)$-bimodule. En particulier, A a lui-même une structure naturelle de $(A - A)$-bimodule.

Soient A une K-algèbre et M un A-module. On note $\mathcal{S}(M)$ l'ensemble des sous-modules de M ordonnés par inclusion. Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de sous-modules de M. Il suit de (1.2) que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ est un sous-module de M: c'est évidemment le plus grand sous-module de M coutenu dans tous les M_λ. La notiou duale de l'intersection est celle de somme. On définit la *somme* $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ de la famille $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ comme étant l'ensemble des sommes de la forme $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ où $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille d'éléments de M à support fini telle que $x_\lambda \in M_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Il est facile de vérifier que $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ est bien un sous-module de M et en fait le plus petit sous-module contenant les M_λ.

LEMME 1.4. *L'ensemble $\mathcal{S}(M)$ des sous-modules du A-module M ordonné par inclusion est un treillis complet, admettant 0 comme plus petit élément, M comme plus grand élément et satisfaisant la propriété modulaire: si $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{S}(M)$ sont tels que $M_1 \subseteq M_2$, alors*

$$M_2 \cap (M_1 + M_3) = M_1 + (M_2 \cap M_3)\,.$$

DÉMONSTRATION. En effet, on vient de montrer que toute famille $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de $\mathcal{S}(M)$ admet un infimum $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ et un suprémum $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ dans $\mathcal{S}(M)$. Donc $\mathcal{S}(M)$ est un treillis complet. Il est clair que 0 est le plus petit élément de $\mathcal{S}(M)$ et M son plus grand élémeut. Il ne reste plus qu'à prouver la modularité. Soient $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{S}(M)$ tels que $M_1 \subseteq M_2$, alors $M_1 \subseteq M_2 \cap (M_1 + M_3)$ et $M_2 \cap M_3 \subseteq M_2 \cap (M_1 + M_3)$ donnent

$$M_1 + (M_2 \cap M_3) \subseteq M_2 \cap (M_1 + M_3)\,.$$

Réciproquement, soit $x_2 = x_1 + x_3$ un élément de $M_2 \cap (M_1 + M_3)$ (où $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, x_3 \in M_3$). Alors $x_3 = x_2 - x_1$. Comme $x_1 \in M_1 \subseteq M_2$, on a $x_2 - x_1 \in M_2$ et donc $x_3 \in M_2 \cap M_3$. Par conséquent, $x_2 = x_1 + x_3 \in M_1 + (M_2 \cap M_3)$. □

Soit maintenant X une partie quelconque du A-module M. On vient de voir que l'intersection de tous les sous-modules de M contenant X est un sous-module de M contenant X. Ce sous-module est noté $\langle X \rangle$ et est dit *engendré* par X, ou admettre X comme *ensemble de générateurs*. Nous allons maintenant montrer que $\langle X \rangle$ est en fait égal à l'ensemble XA des combinaisons linéaires d'éléments de X, c'est-à-dire des sommes de la forme $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda a_\lambda$ où $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille d'éléments de X, et $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments de A telles que $(x_\lambda a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ soit à support fini.

LEMME 1.5. *Soit X une partie d'un A-module M. Alors $\langle X \rangle = XA$.*

DÉMONSTRATION. En effet, $\langle X \rangle$ doit contenir, avec toute famille d'éléments de X, toute combinaison linéaire de ceux-ci, par (1.2), donc $\langle X \rangle \supseteq XA$. L'inclusion inverse provient de ce que XA est évidemment un sous-module de M contenant X. □

Par exemple, si X ne contient que le seul élément x, alors (1.5) donne que $\langle X \rangle = xA = \{xa \mid a \in A\}$. Un tel sous-module est dit *cyclique* engendré par x et est encore noté $\langle x \rangle$. De même, si $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de sous-modules de M et $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, alors $XA = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$. Si, pour une partie X de M, on a $XA = M$, on dit que X *engendre* M ou est un *ensemble de générateurs* pour M. Un A-module M tel qu'il existe un ensemble fini de générateurs pour M est dit être un *module de type fini*. Si $M = \langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$ (ce qu'on note plus simplement $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$), on a alors $M = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i A$. Par exemple, tout A-module cyclique est de type fini. Les modules de type fini joueront un rôle très important par la suite. Le premier résultat que nous montrons à leur sujet est l'existence de sous-modules maximaux: un sous-module N de M est dit *maximal* si $N \neq M$ et si L est un sous-module de M tel que $N \subseteq L \subseteq M$, alors $L = N$ ou $L = M$.

PROPOSITION 1.6. *Soit M un A-module de type fini. Tout sous-module strictement contenu dans M est contenu dans un sous-module maximal. En particulier, M a des sous-modules maximaux.*

DÉMONSTRATION. Soient $M = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ et $N \subsetneq M$ un sous-module. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-modules propres de M contenant N. Alors $\mathcal{E} \neq \emptyset$ car $N \in \mathcal{E}$. Cet ensemble est inductif: si $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une chaîne de sous-modules dans $\mathcal{E}$, il est clair que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ est un sous-module de M; supposons $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda = M$ alors, pour chaque $1 \leq i \leq m$, il existe λ_i tel que $x_i \in N_{\lambda_i}$; prenons N_μ le plus grand des N_{λ_i} (un tel N_μ existe puisque $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une chaîne) alors le fait que $x_1 \dots, x_m$ appartiennent à N_μ entraîne $M = N_\mu$, ce qui contredit le fait que, par définition, $N_\mu \subsetneq M$; par conséquent, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \neq M$ est un sous-module propre et $\mathcal{E}$ est bien inductif. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ a un élément maximal, qui est le sous-module cherché. □

COROLLAIRE 1.7. *Soit A une K-algèbre non nulle. Tout idéal à droite distinct de A est contenu dans un idéal à droite maximal. En particulier, A a des idéaux à droite maximaux.*

DÉMONSTRATION. En effet, $A_A = \langle 1\rangle$ est de type fini (et même cyclique). □

2. Applications linéaires.

De même que les espaces vectoriels s'étudieut par le biais des matrices, les modules s'étudient par le biais des applicatious linéaires. Soit A une K-algèbre.

DÉFINITION. Soient M, N deux A-modules à droite. Une application $f : M \to N$ est appelée *application linéaire* (ou *application A-linéaire*, ou *morphisme de A-modules*, ou *homomorphisme de A-modules*) si:

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in M$.
(ii) $f(xa) = f(x)a$ pour tous $x \in M, a \in A$.

On vérifie de suite que les deux conditions de la définition se laissent condenser en une seule:

$$f(xa + yb) = f(x)a + f(y)b$$

pour tous $x, y \in M$ et $a, b \in A$. Cette remarque se laisse généraliser: soient $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'éléments de M et $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'éléments de A telles que $(x_\lambda a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ soit à support fini, alors la somme $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda a_\lambda$ est par définition une combinaison linéaire d'éléments de M, et une récurrence immédiate sur la formule précédente donne

$$f\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda a_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(x_\lambda)\, a_\lambda.$$

En d'autres termes, une application $f : M \to N$ est linéaire si et seulemeut si elle préserve les combinaisons linéaires.

Notons aussi que toute application A-linéaire $f : M \to N$ est K-linéaire, puisque

$$f(x\alpha) = f(x(1\cdot\alpha)) = f(x)(1\cdot\alpha) = f(x)\alpha$$

pour $x \in M$ et $\alpha \in K$.

Une application liuéaire $f : M \to M$ est parfois appelée un *endomorphisme* de M. Il est clair que l'identité $1_M : M \to M$ est une application linéaire, et que la composition de deux applications linéaires $f : L \to M$ et $g : M \to N$ est uue application linéaire gf ou $g \circ f$ de L dans N.

DÉFINITION. Une application A-linéaire $f : M \to N$ est appelée *isomorphisme* s'il existe une application A-linéaire $g : N \to M$ telle que $f \circ g = 1_N$ et $g \circ f = 1_M$. Les A-modules M et N sont alors dits *isomorphes*, ce qu'on note $M \xrightarrow{\sim} N$.

On note que, si $f : M \to N$ et $g : N \to M$ sont comme dans la définition précédente, alors g est aussi un isomorphisme et est uniquement déterminé par f: en effet, si $g', g'' : N \to M$ sont des applications linéaires telles que $g'f = 1_M$ et $fg'' = 1_N$, alors

$$g' = g'1_N = g'(fg'') = (g'f)g'' = 1_M g'' = g''.$$

L'isomorphisme $g : N \to M$ est alors appelé l'*isomorphisme inverse*, ou *réciproque*, de f.

On vérifie de suite que la composition de deux isomorphismes est un isomorphisme. Par conséquent, la relation $\xrightarrow{\sim}$ est réflexive, symétrique et transitive. Un isomorphisme d'un module M avec lui-même est parfois appelé un *automorphisme*.

LEMME 2.1. *Une application A-linéaire $f : M \to N$ est un isomorphisme si et seulement si elle est bijective.*

DÉMONSTRATION. La nécessité étant immédiate, montrons la suffisance. Pour cela, il faut montrer que si f est une application linéaire bijective, alors f^{-1} est aussi linéaire. Or on a, pour $x \in M$ et $a \in A$

$$f^{-1}(xa) = f^{-1}\left(ff^{-1}(x)a\right) = f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(x)a\right)\right) = \left(f^{-1}f\right)\left(f^{-1}(x)a\right) = f^{-1}(x)a.$$

On montre de même que f^{-1} préserve les sommes. □

EXEMPLES 2.2. (a) Si A est un corps, nous avons là la notion classique d'application linéaire entre espaces vectoriels.

(b) Si $A = \mathbb{Z}$, la définition précédente se ramène à celle d'homomorphisme de groupes (abéliens).

(c) Pour tout A-module M, il existe une unique application linéaire du module nul 0 dans M: c'est celle définie par $0 \mapsto 0$. De même, il existe une unique application linéaire $M \to 0$, définie par $x \mapsto 0$ pour tout $x \in M$. On les appelle toutes deux *applications nulles* et on les note 0.

(d) Soit N un sous-module de M. L'inclusion $j_N : N \to M$ définie par $j_N(x) = x$ pour $x \in N$ est une application linéaire. On l'appelle l'*inclusion* ou *injection canonique*.

(e) Soit N un sous-module de M. L'application $p_N : M \to M/N$ définie par $p_N(x) = x + N$ pour $x \in M$ est une application linéaire (par définition de la structure de module sur M/N). On l'appelle la *projection* ou *surjection canonique*.

(f) Soient A, B deux K-algèbres, M, N deux $(A - B)$-bimodules. Un homomorphisme de groupes abéliens $f : M \to N$ tel que $f(axb) = af(x)b$ (pour tous $a \in A$, $x \in M$, $b \in B$) est A-linéaire et B-linéaire: on dit que c'est un *morphisme de $(A - B)$-bimodules.*

Quelques propriétés suivent immédiatement des définitions. En effet, si $f : M \to N$ est linéaire, on a:

(i) $f(0) = 0$.
(ii) $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in M$.
(iii) L'image $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in M\}$ est un sous-module de N.

(iv) Le noyau $\operatorname{Ker} f = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ est un sous-module de M.
(v) f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = (0)$.

Les démonstrations de ces propriétés sont élémentaires et peuvent être laissées au lecteur.

Il existe une terminologie associée aux applications linéaires.

DÉFINITION. Soit $f : M \to N$ une application A-linéaire:

(i) f est appelée un *monomorphisme* si $fg = 0$ implique $g = 0$.
(ii) f est appelée un *épimorphisme* si $gf = 0$ implique $g = 0$.

LEMME 2.3. *Soit $f : M \to N$ une application A-linéaire:*

(i) *f est un monomorphisme si et seulement si elle est injective.*
(ii) *f est un épimorphisme si et seulement si elle est surjective.*
(iii) *f est un isomorphisme si et seulement si elle est un monomorphisme et un épimorphisme.*

DÉMONSTRATION. (i) Supposons que f est un monomorphisme. Alors l'inclusion $j : \operatorname{Ker} f \to M$ satisfait certainement la condition $fj = 0$. Mais alors on a $j = 0$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} f = 0$: cela montre bien que f est injective.

Réciproquement, si f est injective, supposons $fg = 0$. Alors pour tout x dans le domaine de g, les égalités $0 = (fg)(x) = f(g(x))$ entraînent que $g(x) = 0$. Donc $g = 0$.

(ii) Supposons que f est un épimorphisme. Alors la projection $p : N \to N/\operatorname{Im} f$ satisfait certainement la condition $pf = 0$. Mais alors $p = 0$, c'est-à-dire $N/\operatorname{Im} f = 0$: cela montre que $N = \operatorname{Im} f$ et donc f est surjective.

Réciproquement, si f est surjective, supposons $gf = 0$. Alors pour tout y dans le domaine N de g, il existe $x \in M$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $g(y) = g(f(x)) = 0$. Donc $g = 0$.

(iii) Suit de (i), (ii) et de (2.1). $\square$

L'intérêt de ce qui précède vient de ce qu'on a exprimé deux propriétés ensemblistes (injectivité et surjectivité) en termes d'applications (monomorphisme et épimorphisme). Comme on le verra, cela permettra de rendre les démonstrations plus transparentes. C'est la première étape d'un programme qui nous poussera à étudier les catégories.

Il suit de la démonstration du lemme que le module quotient $N/\operatorname{Im} f$ de N joue un rôle analogue dans la partie (ii) au rôle joué par le sous-module $\operatorname{Ker} f$ de M dans la partie (i). Cela nous amène à la définition.

DÉFINITION. Soit $f : M \to N$ une application A-linéaire. Le modnle quotient $N/\operatorname{Im} f$ est appelé *conoyau* de f et noté $\operatorname{Coker} f$. La projection canonique $N \to N/\operatorname{Im} f$ est appelée le *morphisme conoyau* de f et notée $\operatorname{coker} f$.

De même que f est un monomorphisme si et seulement si son noyau est nul, on a que f est un épimorphisme si et seulement si son conoyau est nnl: en effet, $f : M \to N$ est surjective si et seulement si $N = \operatorname{Im} f$, c'est-à-dire $N/\operatorname{Im} f = 0$.

Soit N un sous-module de M. On sait que le noyau de la projection canonique $p_N : M \to M/N$ est égal à N. De même, comme l'inclusion canonique $j_N : N \to$

M induit un isomorphisme $N \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} j_N$, le conoyau de l'inclusion n'est autre que $\operatorname{Coker} j_N \xrightarrow{\sim} M/N$. Nous verrons plus loin d'autres propriétés des conoyaux.

3. Suites exactes.

DÉFINITION. Une suite de A-modules et d'applications A-linéaires

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

est dite *exacte en* M_i si $\operatorname{Im} f_{i+1} = \operatorname{Ker} f_i$. Elle est dite *exacte* si elle l'est en chaque M_i.

Notons que, si la suite précédente est exacte en M_i, alors $f_i f_{i+1} = 0$ (ce qui équivaut à $\operatorname{Im} f_{i+1} \subseteq \operatorname{Ker} f_i$). Une suite comme plus haut telle que $f_i f_{i+1} = 0$ pour tout i est appelée un *complexe*. Il est clair que toute suite exacte est un complexe, mais l'inverse n'est pas vrai.

Les propriétés suivantes d'une application linéaire $f : M_A \to N_A$ découlent directement de la définition:

(i) f est un monomorphisme si et seulement si $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ est une suite exacte.
(ii) f est un épimorphisme si et seulement si $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ est une suite exacte.
(iii) f est un isomorphisme si et seulement si $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ est une suite exacte.
(iv) La suite $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{j} M \xrightarrow{f} N$, où j est l'inclusion canonique, est exacte.
(v) La suite $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$, où p est la projection canonique, est exacte.
(vi) Avec j et p comme dans (iv), (v) respectivement, la suite $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{j} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$ est exacte.

Les démonstrations sont faciles et peuvent être laissées au lecteur.

PROPOSITION 3.1. *Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de A-modules et d'applications linéaires*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & N \arrow[d, "w"] \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N'
\end{tikzcd}.$$

Il existe une unique application linéaire $u : L \to L'$ rendant le carré de gauche commutatif (on dit alors que u est déduite de v, w par passage aux noyaux*). En outre, u est un monomorphisme si v l'est.*

DÉMONSTRATION. Si une telle application $u : L \to L'$ existait, la commutativité du carré de gauche donnerait $f'u = vf$. Afin de montrer son existence, montrons que, pour tout $x \in L$, on a $vf(x) \in \operatorname{Im} f'$. Or $g'vf(x) = wgf(x) = 0$ (puisque $g'v = wg$, par commutativité du carré de droite) donc $vf(x) \in \operatorname{Ker} g' =$

$\operatorname{Im} f'$. Comme f' est injective, on peut définir $u(x)$ comme étant l'uniqne $x' \in L'$ tel que $vf(x) = f'(x')$. Pour vérifier que u est linéaire, prenons $x_1, x_2 \in L$ et $a_1, a_2 \in A$. Il existe $x'_1, x'_2 \in L$ tels que $vf(x_1) = f'(x'_1)$ et $vf(x_2) = f'(x'_2)$. Mais alors on a

$$\begin{aligned} f'(x'_1 a_1 + x'_2 a_2) &= f'(x'_1)\, a_1 + f'(x'_2)\, a_2 = vf(x_1)\, a_1 + vf(x_2)\, a_2 \\ &= vf(x_1 a_1 + x_2 a_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, $u(x_1 a_1 + x_2 a_2) = x'_1 a_1 + x'_2 a_2 = u(x_1)\, a_1 + u(x_2)\, a_2$. Enfin, le dernier énoncé suit évidemment de ce que $f'u = vf$. □

COROLLAIRE 3.2. *Soit* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ *une suite exacte de* A*-modules et d'applications linéaires. Il existe un unique isomorphisme* $u : L \to \operatorname{Ker} g$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dashed, "u"'] & \\ & M \\ \operatorname{Ker} g \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Ici, j *désigne l'inclusion canonique.*

DÉMONSTRATION. La proposition donne une unique application linéaire u rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_M"] & N \arrow[d, "1_N"] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} g \arrow[r, "j"] & M \arrow[r, "g"] & N . \end{tikzcd}$$

En outre, u est un monomorphisme. Soit $x \in \operatorname{Ker} g$. Alors $j(x) \in M$ est tel que $gj(x) = 0$. Donc il existe $y \in L$ tel que $f(y) = j(x)$. Par définition de u, on a $u(y) = x$. Donc u est un épimorphisme. □

PROPOSITION 3.3. *Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de* A*-modules et d'applications linéaires*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & N \arrow[r] \arrow[d, dashed, "w"'] & 0 \\ L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd}$$

Il existe une unique application linéaire $w : N \to N'$ *rendant le carré de droite commutatif (on dit alors que* w *est déduite de* u, v *par* passage aux conoyaux*). En outre,* w *est un épimorphisme si* v *l'est.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'une telle w existe et soit $z \in N$. Comme g est un épimorphisme, il existe $y \in M$ tel que $g(y) = z$. La commutativité du carré de droite donnerait alors $w(z) = wg(y) = g'v(y)$. Or cette dernière formule définit bien une application, puisque $g(y_1) = g(y_2)$ donne $y_1 - y_2 \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ et il existe $x \in L$ tel que $y_1 - y_2 = f(x)$ d'où

$$g'v(y_1) = g'v(y_2) + g'vf(x) = g'v(y_2) + g'f'u(x) = g'v(y_2)$$

(par la commutativité du carré de droite et l'exactitude de la suite du bas). Il est facile de vérifier (comme dans (3.1)) que w est linéaire. Enfin le dernier énoncé suit évidemment de $wg = g'v$. □

COROLLAIRE 3.4. *Soit* $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *une suite exacte de A-modules et d'applications linéaires. Il existe un unique isomorphisme* $w : N \to \operatorname{Coker} f$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, dashed, "w"] \\ M \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "p"'] & \operatorname{Coker} f \end{tikzcd}$$

Ici, p désigne la projection canonique.

DÉMONSTRATION. La proposition donne une unique application linéaire w rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_L"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_M"] & N \arrow[r] \arrow[d, dashed, "w"] & 0 \\ L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "p"] & \operatorname{Coker} f \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

En outre, w est un épimorphisme. Soit $z \in N$ tel que $w(z) = 0$. Alors il existe $y \in M$ tel que $z = g(y)$ et donc $p(y) = wg(y) = 0$. Mais alors $y \in \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} f$, donc il existe $x \in L$ tel que $y = f(x)$. Par conséquent, $z = g(y) = gf(x) = 0$. □

DÉFINITION. Une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

est appelée une *suite exacte courte.*

Comme on l'a vu, tout épimorphisme $g : M \to N$ induit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} g \xrightarrow{j} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

où j est l'inclusion, et tout monomorphisme $f : L \to M$ induit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0$$

où p est la projection et $\operatorname{Coker} f \xrightarrow{\sim} M/L$. Réciproquement, si $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte, f est un monomorphisme, g est un épimorphisme, $L \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} g$ et $N \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} f \xrightarrow{\sim} M/L$.

Par exemple, on considère la suite de $\mathbb{Z}$-modules (groupes abéliens)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

où f est l'isomorphisme entre $\mathbb{Z}_2$ et l'unique sous-groupe propre $2\mathbb{Z}_4$ de $\mathbb{Z}_4$, et g est la multiplication par 2. Il est clair que cette suite est exacte courte.

Nous allons maintenant montrer deux lemmes fondamentaux sur les suites exactes, dont l'objectif est de remplacer la construction explicite de morphismes par des raisonnements de nature visuelle. La technique que nous emploierons pour les prouver est connue sous le nom de "diagram chasing".

LEMME 3.5 (LEMME DES 5). *Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de A-modules et d'applications linéaires*

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_3"'] & M_4 \arrow[r, "u_4"] \arrow[d, "f_4"'] & M_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
N_1 \arrow[r, "v_1"] & N_2 \arrow[r, "v_2"] & N_3 \arrow[r, "v_3"] & N_4 \arrow[r, "v_4"] & N_5
\end{tikzcd}.$$

(i) *Si f_5 est un monomorphisme et f_2, f_4 sont des épimorphismes, alors f_3 est un épimorphisme.*
(ii) *Si f_1 est un épimorphisme et f_2, f_4 sont des monomorphismes, alors f_3 est un monomorphisme.*
(iii) *Si f_5 est un monomorphisme, f_1 est un épimorphisme et f_2, f_4 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. (i) Soit $y_3 \in N_3$. La surjectivité de f_4 donne $x_4 \in M_4$ tel que $v_3(y_3) = f_4(x_4)$. Or $v_4v_3 = 0$ implique $0 = v_4v_3(y_3) = v_4f_4(x_4) = f_5u_4(x_4)$. Comme f_5 est un monomorphisme, $u_4(x_4) = 0$. Donc $x_4 \in \operatorname{Ker} u_4 = \operatorname{Im} u_3$ et il existe $x_3 \in M_3$ tel que $x_4 = u_3(x_3)$. On a $v_3f_3(x_3) = f_4u_3(x_3) = f_4(x_4) = v_3(y_3)$. Donc $y_3 - f_3(x_3) \in \operatorname{Ker} v_3 = \operatorname{Im} v_2$ et il existe $y_2 \in N_2$ tel que $y_3 - f_3(x_3) = v_2(y_2)$. Comme f_2 est un épimorphisme, il existe $x_2 \in M_2$ tel que $y_2 = f_2(x_2)$. Donc $y_3 - f_3(x_3) = v_2f_2(x_2) = f_3u_2(x_2)$ et par conséquent $y_3 = f_3(x_3 + u_2(x_2))$. Cela montre bien que f_3 est un épimorphisme.

(ii) Soit $x_3 \in M_3$ tel que $f_3(x_3) = 0$. Alors $f_4u_3(x_3) = v_3f_3(x_3) = 0$ donne $u_3(x_3) = 0$ car f_4 est un monomorphisme. Donc $x_3 \in \operatorname{Ker} u_3 = \operatorname{Im} u_2$ et il existe $x_2 \in M_2$ tel que $x_3 = u_2(x_2)$. Alors $v_2f_2(x_2) = f_3u_2(x_2) = f_3(x_3) = 0$ ce qui donne $f_2(x_2) \in \operatorname{Ker} v_2 = \operatorname{Im} v_1$ et il existe $y_1 \in N_1$ tel que $f_2(x_2) = v_1(y_1)$. Comme f_1 est un épimorphisme, il existe $x_1 \in M_1$ tel que $f_1(x_1) = y_1$. Donc $f_2(x_2) = v_1f_1(x_1) = f_2u_1(x_1)$. Comme f_2 est un monomorphisme, on a $x_2 = u_1(x_1)$. Donc $x_3 = u_2(x_2) = u_2u_1(x_1) = 0$.

(iii) Suit de (i), (ii). □

LEMME 3.6 (LEMME DU SERPENT). *Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de A-modules et d'applications linéaires*

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "u'"] & M' \arrow[r, "v'"] & N' &
\end{tikzcd}.$$

Il existe une suite exacte

$$\operatorname{Ker} f \xrightarrow{u_1} \operatorname{Ker} g \xrightarrow{v_1} \operatorname{Ker} h \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} f \xrightarrow{u_2} \operatorname{Coker} g \xrightarrow{v_2} \operatorname{Coker} h$$

où u_1, v_1 sont déduites par passage aux noyaux, u_2, v_2 sont déduites par passage aux conoyaux, et δ sera explicitée plus bas. En outre:

(i) *Si u est un monomorphisme, il en est de même de u_1.*
(ii) *Si v' est un épimorphisme, il en est de même de v_2.*

DÉMONSTRATION. Soient $i : \operatorname{Ker} f \to L$, $j : \operatorname{Ker} g \to M$, $k : \operatorname{Ker} h \to N$ les injections canoniques et $p : L' \to \operatorname{Coker} f$, $q : M' \to \operatorname{Coker} g$, $r : N' \to \operatorname{Coker} h$ les projections canoniques. On essaie de construire un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Ker} f \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"] & \operatorname{Ker} g \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "j"] & \operatorname{Ker} h \arrow[d, "k"] \arrow[dddll, dashed, "\delta"] & \\
 & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "p"] & M' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "q"] & N' \arrow[d, "r"] & \\
 & \operatorname{Coker} f \arrow[r, "u_2"] \arrow[d] & \operatorname{Coker} g \arrow[r, "v_2"] \arrow[d] & \operatorname{Coker} h \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(le tracé de la ligne en pointillé représentant δ explique le nom du lemme). On sait déjà que les colonnes sont exactes. Les applications u_1, v_1 sont déduites respectivement de u, u' et v, v' par passage aux noyaux, tandis que u_2, v_2 sont déduites respectivement de u, u' et v, v' par passage aux conoyaux. Par conséquent, le diagramme est commutatif. Il reste donc à prouver les énoncés suivants:

(1) La 1ère ligne est exacte.

En effet, $kv_1u_1 = vju_1 = vui = 0$ donne $v_1u_1 = 0$ car k est un monomorphisme. Donc $\operatorname{Im} u_1 \subseteq \operatorname{Ker} v_1$. Soit donc $x \in \operatorname{Ker} v_1$, alors $vj(x) = kv_1(x) = 0$ donne $j(x) \in \operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$ et il existe $x' \in L$ tel que $j(x) = u(x')$. Comme on a $0 = gj(x) = gu(x') = u'f(x')$ alors $f(x') = 0$ (car u' est un monomorphisme) et $x' \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} i$: on a donc $x' = i(x')$ d'où $j(x) = u(x') = ui(x') = ju_1(x')$ qui donne $x = u_1(x')$ (car j est un monomorphisme). Donc $x \in \operatorname{Im} u_1$.

(2) La 4e ligne est exacte.

La démonstration est semblable à la précédente et sera omise.

(3) Il existe une application linéaire $\delta : \operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker} f$.

Pour $x'' \in \operatorname{Ker} h$, il existe $x \in M$ tel que $k(x'') = v(x)$, puisque v est un épimorphisme. En outre, on a $v'g(x) = hv(x) = hk(x'') = 0$. Donc

$g(x) \in \operatorname{Ker} v' = \operatorname{Im} u'$. Comme u' est injectif, il existe un unique $y' \in L'$ tel que $g(x) = u'(y')$. On pose

$$\delta(x'') = p(y') = y' + \operatorname{Im} f \in \operatorname{Coker} f.$$

Il faut montrer que $p(y')$ ne dépend pas du choix de x. Supposons que $v(x_1) = v(x_2)$. Alors $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$: il existe $x' \in L$ tel que $x_1 - x_2 = u(x')$. Donc $g(x_1) - g(x_2) = g(x_1 - x_2) = gu(x') = u'f(x')$. Soient y_1', y_2' correspondant à x_1, x_2 respectivement. Alors $u'(y_1' - y_2') = u'(y_1') - u'(y_2') = g(x_1) - g(x_2) = u'f(x')$ donne $y_1' - y_2' = f(x')$, puisque u' est un monomorphisme. Par conséquent, $p(y_1') = p(y_2' + f(x')) = p(y_2') + pf(x') = p(y_2')$.
On a donc bien défini une application $\delta : \operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker} f$.
Pour montrer que δ est linéaire, soient $x_1'', x_2'' \in \operatorname{Ker} h$, $a_1, a_2 \in A$ et $x'' = x_1''a_1 + x_2''a_2$. Soient $x_1, x_2 \in M$ tels que $v(x_1) = k(x_1'')$, $v(x_2) = k(x_2'')$. Alors $v(x_1a_1 + x_2a_2) = k(x'')$. Soient $y_1', y_2' \in L'$ tels que $g(x_1) = u'(y_1')$, $g(x_2) = u'(y_2')$. Alors

$$g(x_1a_1 + x_2a_2) = u'(y_1'a_1 + y_2'a_2)$$

donne $\delta(x'') = p(y_1'a_1 + y_2'a_2) = p(y_1')a_1 + p(y_2')a_2 = \delta(x_1'')a_1 + \delta(x_2'')a_2$.

(4) La suite $\operatorname{Ker} g \xrightarrow{v_1} \operatorname{Ker} h \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} f$ est exacte.

a) $\operatorname{Im} v_1 \subseteq \operatorname{Ker} \delta$. Supposons que $x'' = v_1(x)$ pour un $x \in \operatorname{Ker} g$. Alors $x'' = k(x'') = kv_1(x) = vj(x)$. On prendra donc $j(x) \in M$. Or $gj(x) = 0$. Donc $y' = 0$ et $\delta(x'') = p(y') = 0$.

b) $\operatorname{Ker} \delta \subseteq \operatorname{Im} v_1$. Soit x'' tel que $\delta(x'') = 0$. Alors $y' \in \operatorname{Im} f$ et il existe $x' \in L$ tel que $y' = f(x')$. Donc $g(x) = u'(y') = u'f(x') = gu(x')$ et $x - u(x') \in \operatorname{Ker} g$: il existe $x_0 \in \operatorname{Ker} g$ tel que $x = x_0 + u(x'')$. On a donc $k(x'') = v(x) = v(x_0) + vu(x') = v(x_0) = vj(x_0) = kv_1(x_0)$. D'où $x'' = v_1(x_0)$ puisque k est un monomorphisme.

(5) La suite $\operatorname{Ker} h \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} f \xrightarrow{u_2} \operatorname{Coker} g$ est exacte.

La démonstration est semblable à la précédente et sera omise.

(6) Si u est un monomorphisme, u_1 l'est aussi.

Cela suit de $ui = ju_1$.

(7) Si v' est un épimorphisme, v_2 l'est aussi.

Cela suit de $v_2q = rv'$. □

Une façon simple de se rappeler la construction de δ est la suivante: pour $x'' \in \operatorname{Ker} h$,

$$\delta(x'') = u'^{-1}gv^{-1}(x'') + \operatorname{Im} f.$$

Il faut néanmoins garder à l'esprit qu'alors que u' est un monomorphisme (et donc u'^{-1} est défini sans ambiguïté sur l'image de u'), v^{-1} correspond au choix d'un antécédent quelconque. On verra plusieurs applications du lemme du serpent par la suite, la plus immédiate étant le lemme suivant.

LEMME 3.7 (LEMME DES 3×3). *Soit un diagramme commutatif à colonnes exactes de A-modules et d'applications linéaires*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L'' & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

(i) *Si les deux lignes supérieures sont exactes, alors la ligne inférieure est exacte.*
(ii) *Si les deux lignes inférieures sont exactes, alors la ligne supérieure est exacte.*

DÉMONSTRATION. Pour (i), on appliqne le lemme du serpent aux deux lignes supérienres, et ponr (ii), on l'applique aux deux lignes inférieures. □

4. Les théorèmes d'isomorphisme.

THÉORÈME 4.1. *Soit $f : M_A \to N_A$ une application A-linéaire. Il existe une unique application A-linéaire $\overline{f} : M/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{f} & N \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\
M/\operatorname{Ker} f & \overset{\overline{f}}{\dashrightarrow} & \operatorname{Im} f
\end{array}$$

c'est-à-dire telle que $f = j\overline{f}p$, où j désigne l'inclusion et p la projection canoniques. En outre, $\overline{f}$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Si $\overline{f}$ existe, elle est uniquement déterminée: en effet, posant $L = \operatorname{Ker} f$ et prenant $\overline{x} = x + L \in M/L$, on doit avoir

$$\overline{f}\,(\overline{x}) = \overline{f}(x + L) = \overline{f}p(x) = f(x).$$

Or cette formule définit bien une application puisque, si $x_1, x_2 \in M$ satisfont $x_1 + L = x_2 + L$, alors $x_1 - x_2 \in L = \operatorname{Ker} f$ donc $f\,(x_1 - x_2) = 0$ et donc $f\,(x_1) = f\,(x_2)$. Il est clair que $\overline{f}$ est linéaire, puisque, si $x_1, x_2 \in M$ et $a_1, a_2 \in A$

$$\begin{aligned}
\overline{f}\,(\overline{x}_1 a_1 + \overline{x}_2 a_2) &= \overline{f}\,(x_1 a_1 + x_2 a_2 + L) = \overline{f}p\,(x_1 a_1 + x_2 a_2) \\
&= f\,(x_1 a_1 + x_2 a_2) = f\,(x_1)\, a_1 + f\,(x_2)\, a_2 \\
&= \overline{f}\,(\overline{x}_1)\, a_1 + \overline{f}\,(\overline{x}_2)\, a_2.
\end{aligned}$$

La surjectivité de $\overline{f}$ vient de ce que si $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in M$ tel que $y = f(x) = \overline{f}(x+L)$. Enfin, son injectivité vient de ce que si, pour $x \in M$ on a $\overline{f}(x+L) = 0$, alors $f(x)=0$ et donc $x \in \operatorname{Ker} f = L$. Par conséquent $x+L = L$.□

L'isomorphisme $\overline{f} : M/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$ construit dans le théorème s'appelle *isomorphisme canonique.* La décomposition de l'application linéaire f en l'épimorphisme p, l'isomorphisme $\overline{f}$ et le monomorphisme j est appelée la *décomposition canonique* de f.

En particulier, si $f : M \to N$ est un épimorphisme, alors $j = 1_N$ et donc $\overline{f}$ définit un isomorphisme $M/\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} N$.

Comme application immédiate de ce théorème, nous donnons une caractérisation des modules cycliques.

PROPOSITION 4.2. *Un A-module M est cyclique si et seulement s'il existe un idéal à droite I de A tel que $M \xrightarrow{\sim} A_A/I$.*

DÉMONSTRATION. Si I est un idéal à droite, alors A/I est évidemment cyclique, puisqu'engendré par $1 + I$. Réciproquement, soit $M_A = xA$ un module cyclique. L'application $f : A_A \to M_A$ définie par $a \mapsto xa$ est A-linéaire et surjective. Soit $I_A = \operatorname{Ker} f$. Le théorème (4.1) donne $M_A \xrightarrow{\sim} A_A/I$. □

THÉORÈME 4.3. *Soient M un A-module et L, N deux sous-modules de M. Alors*

$$(L+N)/L \xrightarrow{\sim} N/(L \cap N).$$

DÉMONSTRATION. On a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \cap N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & N/(L \cap N) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "w"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] & L+N \arrow[r, "g'"] & (L+N)/L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où u, v, f, f' sout les inclusions et g, g' les projections canoniques. Par (3.3), il existe une unique application linéaire $w : N/(L \cap N) \to (L+N)/L$ rendant le diagramme commutatif. Pour montrer que w est un monomorphisme supposons que $w(x + L \cap N) = 0$, avec $x \in N$. Alors $x + L = 0$ donne $x \in L$, c'est-à-dire $x \in L \cap N$. Il reste à montrer que w est un épimorphisme. Soit $(x+y) + L \in (L+N)/L$ (avec $x \in L$, $y \in N$). Alors

$$(x+y) + L = y + L = g'(y) = g'v(y) = wg(y)$$

donc w est surjective. □

Ce théorème (dû à Emmy Noether) est appelé la *loi du parallélogramme*, car il s'exprime par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & L+N \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
L \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash] \\
 & L \cap N &
\end{tikzcd}$$

où les côtés opposés du parallélogramme représentent les modules quotients respectifs. Ces côtés opposés sont deux à deux isomorphes, ce que nous indiquons par des barres semblables. Rappelons que dans le treillis modulaire $\mathcal{S}(M)$ des sous-modules de M, le suprémum et l'infimum de la partie $\{L, N\}$ sont respectivement $L + N$ et $L \cap N$.

Notre troisième théorème d'isomorphisme peut être démontré sans difficulté comme l'énoncé correspondant pour les K-algèbres (I.2.5). Afin d'illustrer l'utilisation du lemme du serpent (3.6), nous choisissons d'en donner une démonstration reposant sur l'emploi de ce dernier.

THÉORÈME 4.4. *Soient M un A-module, L et N deux sous-modules tels que $L \subseteq N$. Il existe une unique application linéaire $f : M/L \to M/N$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "p_L"'] \arrow[dr, "p_N"] & \\ M/L \arrow[rr, dashed, "f"] & & M/N \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire telle que $fp_L = p_N$, où p_L, p_N sont les projections canoniques. En outre, f est surjective de noyau N/L et induit un isomorphisme

$$M/N \xrightarrow{\sim} (M/L)\big/(N/L).$$

DÉMONSTRATION. On a le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "j_L"] \arrow[d, "j"] & M \arrow[r, "p_L"] \arrow[d, "1_M"] & M/L \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "j_N"] & M \arrow[r, "p_N"] & M/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où j, j_L, j_N sont les inclusions canoniques. Par (3.3), il existe une unique application linéaire $f : M/L \to M/N$ rendant le diagramme commutatif. Complétant ce diagramme en calculant noyaux et conoyaux, on obtient un diagramme à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} f \arrow[d] \arrow[dddll, dashed] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & N/L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} f \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent donne donc $\operatorname{Coker} f = 0$ et $\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} N/L$. □

THÉORÈME 4.5. *Soient M un A-module, N un sous-module et $p : M \to M/N$ la projection canonique. L'application $L \mapsto p(L)$ est une bijection croissante de l'ensemble ordonné par inclusion des sous-modules de M contenant N sur l'ensemble des sous-modules de M/N. La bijection réciproque est p^{-1}.*

DÉMONSTRATION. Soit L un sous-module de M contenant N. Il est clair que $p(L) = L/N$ est un sous-module de M/N. En outre, $p^{-1}p(L) \supseteq L$. Montrons l'inclusion inverse. Un élément $x \in M$ est dans $p^{-1}p(L)$ si et seulement s'il existe $y \in L$ tel que $p(x) = p(y)$, c'est-à-dire $x - y \in \operatorname{Ker} p = N \subseteq L$, par conséquent $x \in L$. Cela montre bien que $p^{-1}p(L) = L$. Réciproquement, si $\overline{L}$ est un sous-modnle de M/N, il est clair qne $p^{-1}\left(\overline{L}\right) = \{x \in M \mid x + N \in \overline{L}\}$ est un sous-module de M contenant $N = p^{-1}(0)$. D'autre part, p étant surjective, on a $pp^{-1}\left(\overline{L}\right) = \overline{L}$. □

5. Modules d'homomorphismes.

Soient M, N deux A-modules. On note $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ (ou $\operatorname{Hom}(M, N)$ si aucune ambiguïté n'est à craindre) l'ensemble des applications A-linéaires de M dans N. Nous allons définir des opérations dans $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ comme suit: on définit la somme de $f, g : M \to N$ par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(où $x \in M$) et le produit de $f : M \to N$ par $\alpha \in K$ par

$$(f\alpha)(x) = \alpha f(x)$$

(où $x \in M$). On a le lemme suivant.

LEMME 5.1. *Avec les opérations précédentes,* $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ *a une structure de K-module.*

DÉMONSTRATION. On voit aisément que la somme et le produit externe définis plus haut sont bien des opérations sur $\mathrm{Hom}_A(M, N)$, que la somme est commutative et associative, admet l'application nulle $0 : M \to N$ (définie par $x \mapsto 0$ pour tout $x \in M$) comme élément neutre et que, pour toute application linéaire $f : M \to N$, l'application $(-f) : M \to N$ (définie par $x \mapsto -f(x)$ pour tout $x \in M$) est l'opposée de f. D'autre part, on vérifie trivialement la double distributivité de la somme sur le produit externe, ainsi que $f \cdot 1 = f$. Quant à l'associativité mixte, on a, pour tous $x \in M$ et $\alpha, \beta \in K$

$$(f \cdot (\alpha\beta))(x) = \alpha\beta f(x) = \beta\alpha f(x) = \beta \cdot (f\alpha)(x) = ((f\alpha)\beta)(x)$$

d'où $f \cdot (\alpha\beta) = (f\alpha)\beta$. □

Nous avons utilisé de façon essentielle la commutativité de K. Il n'est donc pas vrai en général que $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ soit un A-module. Pour cela, on doit supposer l'existence de structures de bimodules.

LEMME 5.2. *Soient A, B deux K-algèbres.*

(i) *Pour ${}_AM_B$ et N_B,* $\mathrm{Hom}_B(M, N)$ *est un A-module à droite par*

$$(fa)(x) = f(ax)$$

(où $f : M \to N$, $x \in M$, $a \in A$).

(ii) *Pour ${}_AM_B$ et ${}_AN$,* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *est un B-module à gauche par*

$$(bf)(x) = f(xb)$$

(où $f : M \to N$, $x \in M$, $b \in B$).

(iii) *Pour ${}_AM$ et ${}_AN_B$,* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *est un B-module à droite par*

$$(fb)(x) = f(x)b$$

(où $f : M \to N$, $x \in M$, $b \in B$).

(iv) *Pour M_B et ${}_AN_B$,* $\mathrm{Hom}_B(M, N)$ *est un A-module à gauche par*

$$(af)(x) = af(x)$$

(où $f : M \to N$, $x \in M$, $a \in A$).

DÉMONSTRATION. Ce n'est qu'un exercice facile. □

En particulier, si pour une algèbre A, on considère le $(A - A)$-bimodule ${}_AA_A$, on en déduit que, pour tout module M_A, le K-module d'homomorphismes $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ a une structure canonique de A-module à droite par

$$(fa)(x) = f(ax)$$

(où $f : A \to M$, $x \in A$ et $a \in A$). On a un isomorphisme utile.

THÉORÈME 5.3. *Soit M_A un A-module. On a un isomorphisme de A-modules* $\mathrm{Hom}_A(A, M) \xrightarrow{\sim} M_A$.

DÉMONSTRATION. On définit une application $\varphi : \mathrm{Hom}_A(A,M) \to M$ par $f \mapsto f(1)$. Pour montrer que φ est linéaire, prenons $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_A(A,M)$ et $a_1, a_2 \in A$, alors

$$\begin{aligned}\varphi(f_1a_1 + f_2a_2) &= (f_1a_1 + f_2a_2)(1)\\ &= f_1(a_1) + f_2(a_2)\\ &= f_1(1)a_1 + f_2(1)a_2\\ &= \varphi(f_1)\,a_1 + \varphi(f_2)\,a_2.\end{aligned}$$

On vérifie d'autre part que l'application $\psi : M \to \mathrm{Hom}_A(A,M)$ définie par $x \mapsto (a \mapsto xa)$ est la réciproque de φ. □

Soient L, M, N trois A-modules, f, f_1, f_2 des éléments de $\mathrm{Hom}_A(L,M)$, g, g_1, g_2 des éléments de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. On vérifie aussitôt les relations:

(i) $g \circ (f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2) = (g \circ f_1)\,\alpha_1 + (g \circ f_2)\,\alpha_2$.
(ii) $(g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2) \circ f = (g_1 \circ f)\,\alpha_1 + (g_2 \circ f)\,\alpha_2$.
(iii) $g \circ (-f) = (-g) \circ f = -(g \circ f)$.

En particulier, ces relations, avec l'associativité de la composition des applications, définissent une structure de K-algèbre sur le K-module $\mathrm{End}\, M_A$, dont l'identité est 1_M. Cela implique que tout A-module M a une structure naturelle de $(\mathrm{End}\, M - A)$-bimodule puisque la relation

$$(f(x))a = f(x)a = f(xa)$$

(pour $f \in \mathrm{End}\, M$, $x \in M$ et $a \in A$) suit de la linéarité de f.

Encore une fois, on s'intéresse au cas particulier où $M_A = A_A$. On a dans ce cas un isomorphisme d'algèbres.

THÉORÈME 5.4. *On a un isomorphisme de K-algèbres*

$$\mathrm{End}\, A_A \xrightarrow{\sim} A.$$

DÉMONSTRATION. On a construit en (5.3) un isomorphisme de K-modules $\varphi : \mathrm{End}\, A \to A$ défini par $f \mapsto f(1)$. Il reste à vérifier que φ préserve la multiplication. En effet,

$$\varphi(f \circ g) = (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1 \cdot g(1)) = f(1)g(1) = \varphi(f)\varphi(g). \quad \square$$

Exercices du Chapitre II.

1. Soient M un A-module et $X \subseteq M$ une partie quelconque. On définit l'*annulateur* $\operatorname{Ann} X$ de X comme étant l'ensemble

$$\operatorname{Ann} X = \{a \in A \mid xa = 0 \text{ pour tout } x \in X\}.$$

(ii) Montrer que $\operatorname{Ann} X$ est un idéal à droite de A.
(ii) Montrer que si X est un sous-module de M, alors $\operatorname{Ann} X$ est un idéal bilatère de A.
(iii) Montrer que M admet une structure naturelle de $A/\operatorname{Ann} M$-module.
(iv) Un module M_A est dit *fidèle* si $\operatorname{Ann} M = 0$. Montrer que tout A-module M devient fidèle si considéré comme $A/\operatorname{Ann} M$-module.

2. Soient A, B deux K-algèbres, ${}_BM_A$ un $(B-A)$-bimodule. On considère l'ensemble

$$R = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & B \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ x & b \end{bmatrix} \middle| a \in A, b \in B, x \in M \right\}$$

muni de l'addition ordinaire des matrices et de la multiplication induite de celles de A et B, et de la structure de bimodule de M. Montrer que R est une K-algèbre. Montrer que les idéaux à droite de R sont de la forme

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & J \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ x & b \end{bmatrix} \middle| a \in I, x \in X, b \in J \right\}$$

où I_A est un sous-module de A_A, J_B un sous-module de B_B et X_A un sous-module de M_A tel que $JM \subseteq X$ (où JM est l'ensemble des sommes finies de termes de la forme bx avec $b \in J$ et $x \in M$).

3. (i) Soit M_A un module de type fini. Montrer que toute image de M est de type fini.
(ii) Soit $0 \longrightarrow L_A \longrightarrow M_A \longrightarrow N_A \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules. Montrer que si L et N sont de type fini, alors M est de type fini.

4. Soient K un corps et t une indéterminée. Montrer que $K[t]$, considéré comme un K-module, n'est pas de type fini.

5. Soient A une K-algèbre arbitraire et M un A-module de type fini. Montrer qne tout ensemble de générateurs de M contient une partie finie qui suffit pour engendrer M.

6. Soient M, N deux modules, et $f : M \to N$ une application linéaire.
(i) Montrer que, pour tout sous-module M' de M, l'image $f(M') = \{f(x) \mid x \in M'\}$ est un sous-module de N.
(ii) Montrer que, pour tout sous-module N' de N, la pré-image $f^{-1}(N') = \{x \in M \mid f(x) \in N'\}$ est un sous-module de M.

7. Soient U, V, W trois sous-modules de M. Montrer que si $U + V = W + V$, $U \cap V = W \cap V$ et $U \subseteq W$ alors $U = W$.

8. Soient M un A-module, N un sous-module et $x \in M$ tel que $x \notin N$. Montrer que M a un sous-module L maximal pour $N \subseteq L$ et $x \notin L$.

9. Dessiner les treillis de sous-modules des $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{30}$.

10. Soit $f : M \to N$ une application linéaire. Montrer que le noyau L de f est uniquement déterminé par la propriété suivante (dite universelle).

(i) Il existe une application linéaire $\ell : L \to M$ telle que $f\ell = 0$.
(ii) Si $\ell' : L' \to M$ est une application linéaire telle que $f\ell' = 0$, il existe une unique application linéaire $u : L' \to L$ telle que $\ell' = \ell u$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\ell"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ L' \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "\ell'"'] & & \end{tikzcd}$$

11. Soit $f : L \to M$ une application linéaire. Montrer que le conoyau N de f est uniquement déterminé par la propriété suivante (dite universelle).

(i) Il existe une application linéaire $g : M \to N$ telle que $gf = 0$.
(ii) Si $g' : M \to N'$ est une application linéaire telle que $g'f = 0$, il existe une unique application linéaire $v : N \to N'$ telle que $g' = vg$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & N \arrow[d, dashed, "v"] \\ & & N' \end{tikzcd}$$

12. Soient M un A-module et a un élément du centre $Z(A)$ de A. Montrer que l'application $f_a : M \to M$ définie par $x \mapsto xa$ est A-linéaire.

13. Soit $f : M \to N$ linéaire.

(i) Montrer que f est un monomorphisme si et seulement si $fg = fh$ implique $g = h$.
(ii) Montrer que f est un épimorphisme si et seulement si $gf = hf$ implique $g = h$.

14. Soient $f : M \to N$ un épimorphisme, L un sous-module de M et $j : L \to M$ l'inclusion. Montrer que:

(i) Si $L \cap \operatorname{Ker} f = 0$, alors $fj : L \to N$ est un monomorphisme.
(ii) Si $L + \operatorname{Ker} f = M$, alors $fj : L \to N$ est un épimorphisme.

15. Soit n un entier positif. Montrer qu'il existe une suite exacte courte de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

16. Soit $n = rs$ un entier positif. Montrer que la suite de $\mathbb{Z}_n$-modules

$$0 \longrightarrow r\mathbb{Z}_n \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{g} s\mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

(avec f l'inclusion et g la multiplication par s) est exacte.

17. Soit p un nombre premier. Construire une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

et en déduire une suite exacte infinie

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \cdots .$$

18. Montrer que la donnée d'une suite exacte de modules

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

équivaut à la donnée pour chaque i d'une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_i \longrightarrow M_i \longrightarrow \operatorname{Ker} f_{i-1} \longrightarrow 0.$$

19. Soient K un corps et E_1, E_2, E_3 des K-espaces vectoriels tels que la suite

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$$

soit exacte. Montrer que $\dim_K E_2 = \dim_K E_1 + \dim_K E_3$. En déduire que si l'on a une suite exacte de K-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$$

alors $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim_K E_i = 0$.

20. Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de modules et d'applications linéaires

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\ L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Si f, g sont des isomorphismes, montrer qu'il en est de même de h.

21. Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de modules et d'applications linéaires

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "h"'] \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \end{tikzcd} .$$

Si g, h sont des isomorphismes, montrer qu'il en est de même de f.

22. On considère un diagramme commutatif à lignes exactes de modules et d'applications linéaires

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow \\ L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array} .$$

Prouver que $\operatorname{Im} v \cap \operatorname{Im} f' = v(\operatorname{Ker} wg)$ et $\operatorname{Ker} v + \operatorname{Ker} g = v^{-1}(\operatorname{Im} f'u)$, puis que $\dfrac{\operatorname{Im} f' \cap \operatorname{Im} v}{\operatorname{Im}(vf)} \xrightarrow{\sim} \dfrac{\operatorname{Ker}(wg)}{\operatorname{Ker} v + \operatorname{Ker} g}$.

23. On considère un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes de modules et d'applications linéaires

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' \\ & & {\scriptstyle u'}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle u''}\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & {\scriptstyle v'}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle v''}\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L'' & \xrightarrow{f''} & M'' & \xrightarrow{g''} & N'' \end{array} .$$

Montrer que $\operatorname{Im}(uf') = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} v$.

24. On considère un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes de modules et d'applications linéaires

$$\begin{array}{ccccccc} L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle u''}\downarrow & & \\ L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle v'}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle v''}\downarrow & & \\ L'' & \xrightarrow{f''} & M'' & \xrightarrow{g''} & N'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} .$$

Montrer que $\operatorname{Ker}(v''g) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} f$.

25. On considère un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes de modules et d'applications linéaires

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] \\
 & & L \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[d, "k"'] \\
 & H' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f'"'] & L' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g'"'] & M' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "h'"'] & N' \\
0 \arrow[r] & H'' \arrow[r, "u''"] \arrow[d, "f''"'] & L'' \arrow[r, "v''"] \arrow[d, "g''"'] & M'' & \\
 & H''' \arrow[r, "u'''"] \arrow[d] & L''' & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
.$$

Montrer qne u''' est un monomorphisme.

26. Démontrer le lemme des 3×3 sans ntiliser le lemme du serpent.

27. Soit un diagramme commutatif de modules et d'applications linéaires

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "h"'] \\
L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N'
\end{tikzcd}$$

où f, g, h sont des isomorphismes. Si la ligne supérieure est exacte, montrer qu'il en est de même de la ligne inférieure.

28. Soit un diagramme commutatif de modules et d'applications linéaires

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

avec g un isomorphisme. Montrer que:

(i) f est injective et h est surjective.
(ii) f est surjective si et seulement si h est injective.

29. On considère le diagramme commutatif de modules et d'applications linéaires où les deux lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \\
& L' \arrow[dr] & & N \arrow[ur] \arrow[dd, "g"] & \\
& & M \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& L \arrow[uu, "f"] \arrow[ur] & & N' \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0 .
\end{tikzcd}$$

Montrer que $\operatorname{Ker} g \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} f$.

30. Soit un diagramme commutatif de modules et d'applications linéaires

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & N \arrow[r] & 0 \\
L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' &
\end{tikzcd}$$

où la ligne du haut est exacte, et $g'f' = 0$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $w : N \to N'$ telle que $wg = g'v$.

31. Soit un diagramme commutatif de modules et d'applications linéaires

$$\begin{tikzcd}
& L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "v"] & N' \arrow[d, "w"] \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

où la ligne du bas est exacte, et $g'f' = 0$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : L' \to L$ telle que $fu = vf'$.

32. Soient M, M' deux A-modules, $f : M \to M'$ une application linéaire, N, N' deux sous-modules de M et M' respectivement tels que $f(N) \subseteq N'$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\overline{f} : M/N \to M'/N'$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & M' \arrow[d, "p'"] \\
M/N \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & M'/N'
\end{tikzcd}$$

soit commutatif (où p, p' désignent les projections canoniques).

33. Soit A une K-algèbre commutative. Montrer que $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ a une structure naturelle de A-module.

CHAPITRE III

Catégories de modules.

Afin d'aller plus loin, nous introduisons un nouveau langage. Remarquons que l'algèbre étudie à la fois des ensembles munis d'une structure donnée et des applications préservaut cette structure. Par exemple, l'étude des groupes ou celle des espaces vectoriels implique l'étude des homomorphismes de groupes ou des applications linéaires, respectivement. D'autre part, du point de vue d'une structure algébrique donnée, deux objets isomorphes ont les mêmes propriétés et les êtres mathématiques à étudier ne sont pas les objets eux-mêmes mais les classes d'objets isomorphes. Il semble donc nécessaire de travailler dans un cadre où les raisonnements se font à isomorphisme près (et donc fournissent, en même temps qu'un objet, tout objet isomorphe). Ce cadre, qui est celui des catégories, permet d'utiliser de façon optimale les propriétés des applications sans supposer grand'chose sur elles: on n'aura besoin de supposer que l'existence de l'application identité et d'une composition associative (mais il ne sera même pas nécessaire de supposer qu'il s'agit d'applications au sens strict du terme).

1. Catégories et foncteurs.

Cette première section est entièrement consacrée à définir les notions de catégorie, de foncteur et de morphisme fonctoriel, puis à les illustrer sur des exemples.

DÉFINITION. Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est définie par la donnée:

(i) d'une classe $\mathcal{C}_0$ ou $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, appelée classe des *objets* de $\mathcal{C}$,

(ii) pour chaque paire (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, d'un ensemble noté $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ou $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dont les éléments sont appelés *morphismes* (de $\mathcal{C}$) de X vers Y tel que si $(X, Y) \neq (X', Y')$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') = \emptyset$,

(iii) pour chaque triplet d'objets (X, Y, Z) de $\mathcal{C}$, d'une application

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

(où l'image du couple (g, f) est notée $g \circ f$ ou simplement gf) appelée la *composition des morphismes* et satisfaisant les deux conditions suivantes:

(C1) Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,V)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,W)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$, alors $h(gf) = (hg)f$.

(C2) Pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme

$$1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$$

appelé l'*identité* ou le *morphisme identique* sur X et tel que, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W,X)$, alors $f1_X = f$ et $1_Xg = g$.

On ne s'intéressera pas ici aux fondements logiqnes de la théorie: le terme de "classe", comme celui d'"ensemble", sera pris comme notion première. On réservera néanmoins le terme d'"ensemble" aux classes assez petites pour avoir un nombre cardinal. Par contre, on parlera de la "classe" de tous les ensembles, ou de la "classe" de tous les groupes.

Si, dans une catégorie $\mathcal{C}$, on a un morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, on notera $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$. L'objet X est appelé la *source* de f et l'objet Y son *but.* Il suit immédiatement de (ii) que tout morphisme détermine uniquement sa source et son but. Si X est un objet de $\mathcal{C}$, le morphisme 1_X est défini de manière unique: en effet, si $1'_X$ satisfait les mêmes propriétés, on a $1_X = 1_X1'_X = 1'_X$. On a donc une correspondance biunivoque $X \mapsto 1_X$ entre la classe des objets de $\mathcal{C}$ et la classe des morphismes identité: on pourrait définir $\mathcal{C}$ uniquement en termes de morphismes et de compositions. On retiendra de cette remarque l'idée que dans les constructions catégoriques, seuls les morphismes comptent.

Un morphisme $f : X \to X$ est parfois appelé un *endomorphisme* de X. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ est alors noté $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}\, X$.

Un morphisme $f : X \to Y$ est appelé un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $f' : Y \to X$ tel que $ff' = 1_Y$ et $f'f = 1_X$. Un tel morphisme f' est alors unique: si f' et f'' sont tels que $f'f = 1_X$ et $ff'' = 1_Y$, alors $f' = f'1_Y = f'(ff'') = (f'f)f'' = 1_Xf'' = f''$. On appelle f' le morphisme *inverse* ou *réciproque* de f et on le note f^{-1}. S'il existe un isomorphisme $f : X \to Y$, les deux objets X et Y sont dits *isomorphes*, ce qu'on note $X \xrightarrow{\sim} Y$. On vérifie aisément que la composition de deux isomorphismes est un isomorphisme, et que la relation $\xrightarrow{\sim}$ est réflexive, symétrique et transitive. Un isomorphisme $f : X \to X$ est parfois appelé un *automorphisme* de X.

EXEMPLES 1.1. (a) La catégorie Ens des ensembles admet pour objets les ensembles, pour morphismes les applications et pour composition la composition usuelle des applications.

(b) La catégorie Gr des groupes admet pour objets les groupes, pour morphismes les homomorphismes de groupes et pour composition la composition usuelle des applications.

(c) La catégorie Ab des groupes abéliens admet pour objets les groupes abéliens, pour morphismes les homomorphismes de groupes et pour composition la composition usuelle des applications.

(d) La catégorie Top des espaces topologiques admet pour objets les espaces topologiques, pour morphismes les applications continues et pour composition la composition usuelle des applications.

(e) Soit K un anneau commutatif. La catégorie $\operatorname{Alg} K$ des K-algèbres admet pour objets les K-algèbres, pour morphismes les morphismes de K-algèbres et pour composition la composition usuelle des applications.

(f) Soit A une K-algèbre. La catégorie $\operatorname{Mod} A$ des A-modules à droite admet pour objets les A-modules à droite, pour morphismes les applications A-linéaires et pour composition la composition usuelle des applications. On définit de même la catégorie $\operatorname{Mod} A^{\mathrm{op}}$ des A-modules à gauche (ces derniers en effet coïncident avec les A^{op}-modules à droite).

(g) Soit G un monoïde. On fait de G une catégorie $\mathcal{C}$ comme suit: $\mathcal{C}$ n'a qu'un seul objet X et $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) = G$, la composition des morphismes étant alors l'opération de G.

(h) Un ensemble partiellement ordonné E peut être considéré comme une catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les éléments de E, et $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$ est un ensemble à un élément ρ_b^a si $a \leq b$ et vide sinon. Il suit alors de la transitivité de l'ordre partiel sur E que $\rho_b^a \rho_c^b = \rho_c^a$, ce qui définit la composition.

(i) Soit K un corps. On considère la classe $\mathcal{E}$ de tous les triplets (E,F,f) où E, F sont des K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ est K-linéaire. On considère la catégorie dont la classe d'objets est $\mathcal{E}$, et un morphisme $(E,F,f) \to (E',F',f')$ est une paire (u,v) où $u : E \to E'$ et $v : F \to F'$ sont K-linéaires et telles que $f'u = vf$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & F \arrow[d, "v"] \\ E' \arrow[r, "f'"] & F' \end{tikzcd}$$

Si on définit la composition de $(u,v) : (E,F,f) \to (E',F',f')$ et $(u',v') : (E',F',f') \to (E'',F'',f'')$ par $(u',v')(u,v) = (u'u, v'v)$, cela donne bien nne catégorie.

DÉFINITION. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La *catégorie duale* ou *opposée* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ de $\mathcal{C}$ est définie comme suit: les objets de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ sont ceux de $\mathcal{C}$, et

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

pour toute paire (X,Y) d'objets de $\mathcal{C}$, le composé de $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y)$ et $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y,Z)$ étant alors l'élément $fg \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Z)$.

Si par exemple $\mathcal{C}$ est construite à partir d'uu monoïde G comme dans l'exemple (1.1)(g), alors $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ est construite à partir du monoïde opposé G^{op}.

Une propriété de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ est dite *duale* d'une propriété de $\mathcal{C}$ si elle est obtenue à partir de cette dernière par inversement du sens des morphismes. Cette notion sera évidente dans chaque cas particulier. On remarque que $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

DÉFINITION. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories. On dit que $\mathcal{D}$ est une *sous-catégorie* de $\mathcal{C}$ si tout objet de $\mathcal{D}$ est un objet de $\mathcal{C}$, tout morphisme de $\mathcal{D}$ est un morphisme de $\mathcal{C}$ et la composition est la même dans $\mathcal{D}$ et dans $\mathcal{C}$.

Ainsi, si X, Y sont deux objets de $\mathcal{D}$, on a,

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

Si cette inclusion est une égalité pour tous X, Y dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire si tout morphisme $X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est aussi un morphisme de $\mathcal{D}$, on dit que $\mathcal{D}$ est une *sous-catégorie pleine*.

Une sous-catégorie de Ens (non nécessairement pleine) est parfois appelée une *catégorie concrète*. Dans l'exemple (1.1), (b) (c) (d) (e) montrent des catégories concrètes, aucune n'étant pleine dans Ens. La catégorie Ab est une sous-catégorie pleine de la catégorie concrète Gr. De même, $\mathrm{Alg}\, K$ est une sous-catégorie de la catégorie concrète $\mathrm{Mod}\, K$, qui n'est pas pleine puisqu'un morphisme d'algèbres, en plus d'être K-linéaire, préserve produits et identité.

L'idée d'une application préservant les structures se généralise aux catégories. Une catégorie étant définie par objets, morphismes et composition, il faudrait qu'à chaque objet, ou morphisme, de la première, on fasse correspondre un objet, ou un morphisme, respectivement, de la seconde, et cette correspondance doit être compatible avec la composition des morphismes.

DÉFINITION. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories.

1. Un *foncteur covariant* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est défini par la donnée pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $F(X)$ ou FX de $\mathcal{D}$, et pour chaque morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $F(f)$ ou $Ff : FX \to FY$ de $\mathcal{D}$ tel que:

(F1) Si gf est défini dans $\mathcal{C}$, alors $F(g)F(f)$ est défini dans $\mathcal{D}$ et $F(gf) = F(g)F(f)$.

(F2) Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{FX}$.

2. Un *foncteur contravariant* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est défini par la donnée pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ d'un objet $F(X)$ ou FX de $\mathcal{D}$, et pour chaque morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $F(f)$ ou $Ff : FY \to FX$ de $\mathcal{D}$ tel que:

(F1) Si gf est défini dans $\mathcal{C}$, alors $F(f)F(g)$ est défini dans $\mathcal{D}$ et $F(gf) = F(f)F(g)$.

(F2) Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $F(1_X) = 1_{FX}$.

Un foncteur contravariant $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ n'est autre qu'un foncteur covariant $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$, ou encore un foncteur covariant $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$. Quand on dira foncteur sans plus préciser, on voudra parler d'un foncteur covariant. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est parfois appelé un *endofoncteur*.

EXEMPLES 1.2. (a) Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{D}$. Il existe un foncteur naturel, dit d'*inclusion*, $J : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ défini pour tout objet X de $\mathcal{C}$ par $J(X) = X$ et pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$ par $J(f) = f$. Si par exemple $\mathcal{C} = \mathcal{D}$, le foncteur d'inclusion s'appelle foncteur *identité* et est noté $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

(b) Si $\mathcal{C} = \mathrm{Gr}, \mathrm{Ab}, \mathrm{Mod}\, A, \mathrm{Alg}\, K$, il existe un foncteur $U : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$, dit *foncteur oubli*, qui associe à chaque objet son ensemble sous-jacent, et à chaque morphisme l'application sous-jacente. De même, si A est une K-algèbre, il existe un foncteur oubli $U : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, K$.

(c) Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ trois catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ deux foncteurs. Le *foncteur composé* $G \circ F$ ou GF de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ est défini par $(GF)(X) = G(F(X))$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$ et $(GF)(f) = G(F(f))$ pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$.

(d) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, X un objet de $\mathcal{C}$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ associe à chaque objet M de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, M)$ et à chaque morphisme $f : M \to N$ l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,N)$ définie par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,f)(g) = fg$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "fg"'] & M \arrow[d, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Ce foncteur est covariant. Un cas particulier important est celui où $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}\,A$, avec A une K-algèbre. Alors, pour un A-module X, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ est un foncteur de $\mathrm{Mod}\,A$ dans $\mathrm{Mod}\,K$ (voir (II. 5.1)).

(e) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, X un objet de $\mathcal{C}$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ associe à chaque objet M de $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,X)$ et à chaque morphisme $f : M \to N$ l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,X)$ définie par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,X)(g) = gf$.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "g"] & X \\ M \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "gf"'] & \end{tikzcd}$$

Ce foncteur est contravariant. Un cas particulier important est celui où $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}\,A$ avec A une K-algèbre. Alors, pour un A-module X, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-,X)$ est un foncteur de $\mathrm{Mod}\,A$ dans $\mathrm{Mod}\,K$ (voir (II. 5.1)).

On exprime parfois la situation des exemples (d) et (e) plus haut en disant que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$ est un *bifoncteur* (ou *foncteur de deux variables*) covariant dans la seconde variable et contravariant dans la première.

Afin de comparer deux foncteurs, nous aurons besoin d'une notion de morphisme entre eux.

DÉFINITION. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories.

1. Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs covariants. Un *morphisme fonctoriel* (ou *transformation naturelle*) $\varphi : F \to G$ est défini par la donnée pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $\varphi_X : FX \to GX$ de $\mathcal{D}$ tel que, si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, on a $\varphi_Y F(f) = G(f)\varphi_X$, c'est-à-dire que le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & GX \arrow[d, "G(f)"] \\ FY \arrow[r, "\varphi_Y"] & GY \end{tikzcd} .$$

2. Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs contravariants. Un *morphisme fonctoriel* (ou *transformation naturelle*) $\varphi : F \to G$ est défini par la donnée pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ d'un morphisme $\varphi_X : FX \to GX$ de $\mathcal{D}$ tel que, si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, on a $\varphi_X F(f) = G(f)\varphi_Y$, c'est-à-dire que le carré suivant

est commutatif

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\varphi_X} & GX \\ {\scriptstyle F(f)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle G(f)} \\ FY & \xrightarrow{\varphi_Y} & GY \end{array} .$$

Soient $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ trois foncteurs covariants, $\varphi : F \to G$ et $\psi : G \to H$ deux morphismes fonctoriels. Le *morphisme fonctoriel composé* $\psi\varphi : F \to H$ est défini par

$$(\psi\varphi)_X = \psi_X \varphi_X$$

pour tout objet X de $\mathcal{C}$. Pour tout foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, on définit un morphisme fonctoriel *identité* $1_F : F \to F$ par la condition $(1_F)_X = 1_{FX}$. On définit de même les notions correspondantes pour les foncteurs contravariants.

Soient $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs et $\varphi : F \to G$ un morphisme fonctoriel. On dit que φ est un *isomorphisme fonctoriel* si φ_X est un isomorphisme pour chaque objet X de $\mathcal{C}$. On voit alors aisément que les morphismes φ_X^{-1} définissent un morphisme fonctoriel $G \to F$ noté φ^{-1} et appelé l'*inverse* de φ. Donc $\varphi : F \to G$ est un isomorphisme fonctoriel si et seulement s'il existe un morphisme fonctoriel $\psi : G \to F$ tel que $\varphi\psi = 1_G$ et $\psi\varphi = 1_F$. Enfin, le composé de deux isomorphismes fonctoriels est aussi un isomorphisme fonctoriel.

EXEMPLES 1.3. (a) Soit $u : M \to N$ un morphisme d'une catégorie $\mathcal{C}$. On considère les foncteurs covariants $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$. On associe à u un morphisme fonctoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, -) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$ comme suit: pour un objet X de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X)$ est défini par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, X)(f) = fu$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "fu"'] & N \arrow[d, "f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Il faut montrer que, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, X) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u,X)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,f)} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Y) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u,Y)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Y) \end{array}$$

et cela suit de ce que, pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, X)$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, Y)\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, f)(g) = fgu = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, f)\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, X)(g).$$

La composition commune $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, Y)\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, f) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, f)\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, X)$ (où $u : M \to N$ et $f : X \to Y$ sont des morphismes de $\mathcal{C}$) est une application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, X)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Y)$, notée $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, f)$. Si $L \xrightarrow{v} M \xrightarrow{u} N$ et $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sont des morphismes de $\mathcal{C}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(v, g)\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, f) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(uv, gf)$.

(b) De même, $u : M \to N$ définit un morphisme fonctoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,u)$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,N)$ entre foncteurs contravariants.

(c) En (a) et (b), on voit que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u,-)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,u)$ sont des isomorphismes fonctoriels si u est un isomorphisme de $\mathcal{C}$.

(d) Soient A une K-algèbre, $F, G : \mathrm{Mod}\,A \to \mathrm{Mod}\,A$ les foncteurs $F = \mathrm{Hom}_A(A,-)$ et $G = 1_{\mathrm{Mod}\,A}$. Le morphisme fonctoriel $\varphi : F \to G$ défini par $\varphi_M : \mathrm{Hom}_A(A,M) \to M$, $f \mapsto f(1)$ est un isomorphisme fonctoriel d'inverse $\psi : G \to F$ défini par $\psi_M : M \to \mathrm{Hom}_A(A,M)$, $x \mapsto (a \mapsto xa)$. En effet, on sait déjà que pour chaque M, φ_M et ψ_M sont des isomorphismes inverses (II. 5.3). Il reste à vérifier la fonctorialité: soit donc $u : M \to N$ une application A-linéaire, on doit montrer que le carré suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(A,M) & \xrightarrow{\varphi_M} & M \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(A,u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ \mathrm{Hom}_A(A,N) & \xrightarrow{\varphi_N} & N \end{array} .$$

Or, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(A,M)$, on a

$$\varphi_N \,\mathrm{Hom}_A(A,u)(f) = \varphi_N(uf) = (uf)(1) = u(f(1)) = u\varphi_M(f).$$

2. Produits et sommes directes.

La notion de produit existe dans les catégories d'ensembles, de groupes, d'espaces vectoriels, etc... Nous allons la formuler en termes catégoriques, c'est-à-dire, nous le rappelons, en termes d'objets et de morphismes.

DÉFINITION. Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Un *produit* $\big(M, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big)$ de cette famille est la donnée d'un objet M et d'une famille de morphismes $(p_\lambda : M \to M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ telle que, si $\big(M', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\big)$ est la donnée d'un autre objet M' et d'une autre famille de morphismes $(p'_\lambda : M' \to M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, alors il existe un unique morphisme $f : M' \to M$ tel que $p_\lambda f = p'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_\lambda"] & M_\lambda \\ M' \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "p'_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

On exprime cette propriété en disant que M est un *objet universel* (plus précisément, un objet universellement attirant). Il est utile de reformuler l'énoncé d'unicité dans la propriété universelle précédente comme suit: si f et g sont deux morphismes tels que $p_\lambda f = p_\lambda g$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, alors $f = g$.

LEMME 2.1. *Si une famille d'objets $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ admet un produit, celui-ci est unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. Soient $\left(M,(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ et $\left(M',(p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ deux produits de la famille $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Alors il existe des morphismes $f : M' \to M$ et $f' : M \to M'$ tels que $p_\lambda f = p'_\lambda$ et $p'_\lambda f' = p_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "p_\lambda"] & M_\lambda \\
M' \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[r, "p'_\lambda"] & M_\lambda \arrow[u, "1_{M_\lambda}"'] \\
M \arrow[u, dashed, "f'"] \arrow[r, "p_\lambda"] & M_\lambda \arrow[u, "1_{M_\lambda}"'] .
\end{tikzcd}$$

Mais alors $p_\lambda f f' = p_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Comme $p_\lambda 1_M = p_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'unicité dans la définition donne $ff' = 1_M$. De même, $f'f = 1_{M'}$.□

Par abus de langage, on dit que M, s'il existe, est le *produit de la famille* $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ce qu'on note $M = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Si $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, on note $M = \prod_{i=1}^{n} M_i$ ou $M = M_1 \times \cdots \times M_n$. Si tous les M_λ sont égaux à N, on note $M = N^\Lambda$ (ou N^n si $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$). Les $(p_\lambda : M \to M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sont appelés les *projections canoniques.*

THÉORÈME 2.2. *Soit A une K-algèbre. Toute famille $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de A-modules admet un produit dans* Mod A, *unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. Il suffit, d'après le lemme, d'établir l'existence. Posons $M = \left\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid x_\lambda \in M_\lambda\right\}$ et $p_\lambda : (x_\mu)_{\mu\in\Lambda} \mapsto x_\lambda$. On définit des opérations sur M par

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$
$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\, a = (x_\lambda a)_{\lambda\in\Lambda}$$

pour $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans M et $a \in A$. Alors M est muni d'une structure de A-module et chaque $p_\lambda : M \to M_\lambda$ est A-linéaire. Soit $\left(M',(p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ comme dans la définition. Alors, pour $x' \in M'$, la formule $f(x') = \left(p'_\lambda(x')\right)_{\lambda\in\Lambda}$ définit évidemment la seule application A-linéaire telle que $p_\lambda f = p'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.□

La notion de somme directe, ou coproduit, est la notion duale de celle de produit, au sens où on l'a vu dans la section précédente.

DÉFINITION. Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Une *somme directe*, ou *coproduit* $\left(M,(q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ de cette famille est la donnée d'un objet M et d'une famille de morphismes $(q_\lambda : M_\lambda \to M)_{\lambda\in\Lambda}$ telle que, si $\left(M',(q'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right)$ est la donnée d'un autre objet M' et d'une autre famille de morphismes $(q'_\lambda : M_\lambda \to M')_{\lambda\in\Lambda}$ alors il existe un unique morphisme $f : M \to M'$ tel que $fq_\lambda = q'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[r, "q_\lambda"] \arrow[dr, "q'_\lambda"'] & M \arrow[d, dashed, "f"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

On exprime cette propriété en disant que M est un *objet universel* (ou plus précisément universellement repoussant). L'unicité dans la propriété universelle précédente peut être reformulée comme suit: si f et g sont deux morphismes tels que $fq_\lambda = gq_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, alors $f = g$.

LEMME 2.3. *Si une famille d'objets admet une somme directe, celle-ci est unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. Duale de celle de (2.1) et laissée en exercice. □

Par abus de langage, on dit que M, s'il existe, est la *somme directe*, ou le *coproduit*, de la famille $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. On note alors $M = \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ ou $\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Si $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$, on note $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$, $\coprod\limits_{i=1}^{n} M_i$, $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ ou encore $M_1 \amalg M_2 \amalg \cdots \amalg M_n$. Si tous les M_λ sont égaux à N, on note leur somme directe $N^{(\Lambda)}$ (ou $N^{(n)}$ si $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$). Les $(q_\lambda : M_\lambda \to M)_{\lambda\in\Lambda}$ sont appelés les *injections canoniques.*

THÉORÈME 2.4. *Soit A une K-algèbre. Toute famille $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de A-modules admet une somme directe dans* Mod A, *unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'établir l'existence. Soit M le sous-ensemble de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ formé des $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dont le support est fini: on voit de suite que M est un sous-module de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. On définit, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $q_\lambda : M_\lambda \to M$ par $q_\lambda(x) = (y_\mu)_{\mu\in\Lambda}$ où $y_\lambda = x$ et $y_\mu = 0$ pour $\mu \neq \lambda$. Il est clair que q_λ est A-linéaire. Soient M' et $(q'_\lambda : M_\lambda \to M')_{\lambda\in\Lambda}$ comme dans la définition. Alors, pour $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in M$, on a $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} q_\lambda(x_\lambda)$ (en effet, la somme a un sens car $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est à support fini). Donc $f\left((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} q'_\lambda(x_\lambda)$ définit la seule application A-linéaire telle que $fq_\lambda = q'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. □

On remarque qu'alors que les définitions de produit et de somme directe (qui sont purement catégoriques) sont duales, les constructions des objets correspondants de Mod A (qui, elles, dépeudent des propriétés particulières de Mod A) ne le sont pas. Ce phénomène paraîtra à plusieurs reprises dans l'étude de Mod A et s'exprime en disant que la catégorie Mod A n'est pas *auto-duale* (c'est-à-dire n'est pas identique à la catégorie opposée). Notons aussi que somme directe et produit coïncident lorsque l'ensemble d'indices est fini.

Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de sous-modules d'un module M_A. On rappelle que leur somme $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ est définie comme étant l'ensemble des sommes de la forme $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ où $x_\lambda \in M_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, et la famille $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est à support fini. Par la définition de somme directe appliquée aux injections canoniques $M_\mu \to \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, il existe une application A-linéaire $f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ définie par

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda.$$

En particulier, f est évidemment un épimorphisme. Si f est un isomorphisme, de sorte que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \xrightarrow{\sim} \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, on dit que la somme $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ est *directe*.

PROPOSITION 2.5. *Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de sous-modules d'un module M. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *La somme $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ est directe.*

(ii) *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $M_\lambda \cap \left(\sum_{\mu\neq\lambda} M_\mu\right) = 0$.*

(iii) *Si $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = 0$ avec $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille à support fini telle que $x_\lambda \in M_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, alors $x_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.*

(iv) *Tout $x \in \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ s'écrit uniquement sous la forme $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ avec $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille à support fini telle que $x_\lambda \in M_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.*

DÉMONSTRATION. (i) implique (ii). Supposons la somme $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ directe et soit $x_\lambda = \sum_{\mu\neq\lambda} x_\mu \in M_\lambda \cap \left(\sum_{\mu\neq\lambda} M_\mu\right)$. Alors $-x_\lambda + \sum_{\mu\neq\lambda} x_\mu = 0$. Soit $y = (y_\nu)_{\nu\in\Lambda}$ défini par $y_\lambda = -x_\lambda$ et $y_\nu = x_\nu$ pour $\nu \neq \lambda$, alors $f(y) = 0$. Comme f est un isomorphisme, $y = 0$ et donc $x_\lambda = 0$.

(ii) implique (iii). Si $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = 0$ alors pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $-x_\lambda = \sum_{\mu\neq\lambda} x_\mu \in M_\lambda \cap \left(\sum_{\mu\neq\lambda} M_\mu\right) = 0$. Donc $x_\lambda = 0$.

(iii) implique (i). En effet, (iii) exprime exactement que le noyau de f est nul.

(iii) et (iv) sont équivalentes. En effet, si $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda$ avec $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ à support fini et telles que $x_\lambda,\ y_\lambda \in M_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, alors

$\sum_{\lambda\in\Lambda}(x_\lambda - y_\lambda) = 0$ donne $x_\lambda = y_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Réciproquement, si $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = 0$, l'unicité de l'écriture de $0 \in M$ donne $x_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. □

Si un module M est somme directe de deux sous-modules M_1 et M_2, on dit que M_1 et M_2 sont *supplémentaires* (dans M). D'après la proposition précédente, c'est le cas si et seulement si $M = M_1 + M_2$ et $M_1 \cap M_2 = 0$. Enfin, on dit qu'un sous-module N de M en est un *facteur direct* s'il existe un sous-module L de M tel que $M \xrightarrow{\sim} N \oplus L$.

THÉORÈME 2.6. *Soient, dans une catégorie* $\mathcal{C}$, *deux familles d'objets* $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *et* $(N_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$, $\left(q_\lambda : M_\lambda \to \bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *les injections associées à la somme directe de la première famille, et* $\left(p_\sigma : \prod_{\omega\in\Sigma} N_\omega \to N_\sigma\right)_{\sigma\in\Sigma}$ *les projections associées au produit de la seconde famille. Alors il existe une bijection canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, \prod_{\sigma\in\Sigma} N_\sigma\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{(\lambda,\sigma)\in\Lambda\times\Sigma} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_\lambda, N_\sigma)$$

donnée par $f \mapsto (p_\sigma f q_\lambda)_{(\lambda,\sigma)\in\Lambda\times\Sigma}$.

DÉMONSTRATION. En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu \arrow[r, "f"] & \prod_{\omega\in\Sigma} N_\omega \arrow[d, "p_\sigma"] \\ M_\lambda \arrow[u, "q_\lambda"] \arrow[r, dashed, "p_\sigma f q_\lambda"] & N_\sigma \end{tikzcd}$$

montre bien qu'on a là une application. Elle est surjective, car si

$$(g_{\sigma\lambda} : M_\lambda \to N_\sigma)_{(\lambda,\sigma)\in\Lambda\times\Sigma}$$

est un élément de $\prod_{(\lambda,\sigma)\in\Lambda\times\Sigma} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_\lambda, N_\sigma)$, alors, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la propriété universelle de $\prod_{\omega\in\Sigma} N_\omega$ permet de définir un morphisme $h_\lambda : M_\lambda \to \prod_{\omega\in\Sigma} N_\omega$ tel que $p_\sigma h_\lambda = g_{\sigma\lambda}$ pour tout $\sigma \in \Sigma$, puis la propriété universelle de $\bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu$ permet de définir un morphisme $f : \bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu \to \prod_{\omega\in\Sigma} N_\omega$ tel que $f q_\lambda = h_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. On a bien $g_{\sigma\lambda} = p_\sigma h_\lambda = p_\sigma f q_\lambda$ pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $\sigma \in \Sigma$. Enfin, cette application est injective, car si $p_\sigma f q_\lambda = p_\sigma f' q_\lambda$ pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $\sigma \in \Sigma$, l'unicité dans la définition du produit entraîne que $f q_\lambda = f q'_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et l'unicité dans la définition de la somme directe entraîne que $f = f'$. □

COROLLAIRE 2.7. *Soient A une K-algèbre, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(N_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ deux familles de A-modules, $\left(q_\lambda : M_\lambda \to \bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu\right)_{\lambda\in\Lambda}$ les injections associées à la somme directe de la première famille et $\left(p_\sigma : \prod_{\omega\in\Sigma} N_\omega \to N_\sigma\right)_{\sigma\in\Sigma}$ les projections associées au produit de la seconde famille. Il existe un isomorphisme de K-modules*

$$\operatorname{Hom}_A\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, \prod_{\sigma\in\Sigma} N_\sigma\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{(\lambda,\sigma)\in\Lambda\times\Sigma} \operatorname{Hom}_A(M_\lambda, N_\sigma)$$

donné par $f \mapsto (p_\sigma f q_\lambda)_{(\lambda,\sigma)\in\Lambda\times\Sigma}$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que l'application donnée est K-linéaire, et c'est immédiat au moyen des formules de (II.5). □

COROLLAIRE 2.8. *Soient A une K-algèbre, $(N_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ une famille de A-modules, $\left(p_\sigma : \prod_{\omega\in\Sigma} N_\omega \to N_\sigma\right)_{\sigma\in\Sigma}$ les projections associées à son produit et M un A-module. Il existe un isomorphisme de K-modules*

$$\operatorname{Hom}_A\left(M, \prod_{\sigma\in\Sigma} N_\sigma\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma\in\Sigma} \operatorname{Hom}_A(M, N_\sigma)$$

donné par $f \mapsto (p_\sigma f)_{\sigma\in\Sigma}$. □

COROLLAIRE 2.9. *Soient A une K-algèbre, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules, $\left(q_\lambda : M_\lambda \to \bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu\right)_{\lambda\in\Lambda}$ les injections associées à sa somme directe et N un A-module. Il existe un isomorphisme de K-modules*

$$\operatorname{Hom}_A\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Hom}_A(M_\lambda, N)$$

donné par $f \mapsto (f q_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. □

On notera qu'alors que le foncteur covariant $\operatorname{Hom}_A(M, -)$ préserve les produits, le foncteur contravariant $\operatorname{Hom}_A(-, N)$ transforme les sommes en produits.

Il existe un cas particulier important dont l'étude nous permettra d'utiliser une notation matricielle. Soient $M_1, \ldots, M_m$ et $N_1, \ldots, N_n$ des A-modules. On note

$$\begin{aligned} H &= [\operatorname{Hom}_A(M_j, N_i)] \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{Hom}_A(M_1, N_1) & \operatorname{Hom}_A(M_2, N_1) & \cdots & \operatorname{Hom}_A(M_m, N_1) \\ \operatorname{Hom}_A(M_1, N_2) & \operatorname{Hom}_A(M_2, N_2) & \cdots & \operatorname{Hom}_A(M_m, N_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \operatorname{Hom}_A(M_1, N_n) & \operatorname{Hom}_A(M_2, N_n) & \cdots & \operatorname{Hom}_A(M_m, N_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

l'ensemble des $n \times m$ matrices de la forme

$$[f_{ij}] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix}$$

où $f_{ij} : M_j \to N_i$ est A-linéaire. Si on définit, pour $[f_{ij}]$, $[g_{ij}] \in H$ et $\alpha, \beta \in K$

$$[f_{ij}]\alpha + [g_{ij}]\beta = [f_{ij}\alpha + g_{ij}\beta]$$

il est clair que H est muni d'une structure de K-module.

COROLLAIRE 2.10. *Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme de K-modules*

$$\operatorname{Hom}_A \left(\bigoplus_{j=1}^{m} M_j, \bigoplus_{i=1}^{n} N_i \right) \xrightarrow{\sim} H$$

donné par $f \mapsto [p_i f q_j]$ où $p_i : \bigoplus_{k=1}^{n} N_k \to N_i$ est la projection canonique et $q_j : M_j \to \bigoplus_{\ell=1}^{m} M_\ell$ l'injection canonique.

DÉMONSTRATION. En tant que A-modules, on a $\bigoplus_{i=1}^{n} N_i = \prod_{i=1}^{n} N_i$. Il ne reste plus qu'à appliquer (2.6) en observant que H est isomorphe (en tant que K-module) au produit $\prod_{(i,j)} \operatorname{Hom}_A(M_j, N_i)$.□

Le corollaire précédent prend tout son intérêt si les M_j coïncident avec les N_i. Dans ce cas, on a un isomorphisme de K-modules $H \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A \left(\bigoplus_{j=1}^{m} M_j, \bigoplus_{j=1}^{m} M_j \right)$ $= \operatorname{End}_A \left(\bigoplus_{j=1}^{m} M_j \right)$. Or le terme de droite est une K-algèbre. Nous allons montrer que H est aussi une K-algèbre et que l'isomorphisme précédent est un isomorphisme de K-algèbres. En effet, on peut définir une multiplication dans H comme on le fait ordinairement pour les matrices, c'est-à-dire par la règle

$$[g_{ij}]\,[f_{ij}] = [h_{ij}]$$

où $h_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_{ik} f_{kj} \in \operatorname{Hom}_A(M_j, M_i)$.

PROPOSITION 2.11. *Avec les définitions précédentes, H est une K-algèbre isomorphe à $\operatorname{End}_A \left(\bigoplus_{j=1}^{m} M_j \right)$.*

DÉMONSTRATION. La vérification que H est une K-algèbre est un exercice facile. Pour montrer le deuxième énoncé, il faut montrer que l'isomorphisme de K-modules $\varphi : \operatorname{End}_A\left(\bigoplus_{j=1}^{m} M_j\right) \to H$ défini dans (2.10) par $f \mapsto [p_i f q_j]$ est un morphisme d'algèbres. Pour cela, observons que les p_i et q_j satisfont les identités $q_1p_1 + q_2p_2 + \cdots + q_mp_m = 1_{\oplus M_j}$, $p_jq_j = 1_{M_j}$ pour tout j et $p_iq_i = 0$ pour $i \neq j$. On voit donc de suite que $\varphi\left(1_{\oplus M_j}\right) = [p_iq_j]$ est la matrice identité. Soient donc $f, g \in \operatorname{End}_A\left(\bigoplus_{j=1}^{m} M_j\right)$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(gf) &= [p_i g f q_j] = \left[p_i g\left(\textstyle\sum_{k=1}^{m} q_k p_k\right) f q_j\right] \\
&= \left[\textstyle\sum_{k=1}^{m} (p_i g q_k)(p_k f q_j)\right] = [p_i g q_k]\,[p_k f q_j] \\
&= \varphi(g)\varphi(f). \quad \square
\end{aligned}$$

COROLLAIRE 2.12. *Soient A une K-algèbre, M un A-module, alors*

$$\operatorname{End}_A\left(M^{(n)}\right) \xrightarrow{\sim} M_n\left(\operatorname{End}_A(M)\right). \quad \square$$

COROLLAIRE 2.13. *Soient A une K-algèbre, $M_1, \ldots, M_m$ des A-modules tels que $\operatorname{Hom}_A(M_i, M_j) = 0$ pour $i \neq j$. Alors $\operatorname{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{m} M_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{m} \operatorname{End}_A M_i$.* $\square$

3. Modules libres.

Soit M un A-module. Un ensemble $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de M est dit *libre* ou *linéairement indépendant* si, pour toute famille $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'éléments de A telle que $(x_\lambda a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ soit à support fini, la relation $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda a_\lambda = 0$ entraîne $a_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Un ensemble X qui n'est pas libre est dit *lié* ou *linéairement dépendant.*

Une *base* d'un module M est par définition une famille libre d'éléments de M qui engendre ce dernier. Bien sûr, il n'est pas vrai que tout module ait une base. Par exemple, si M est un groupe abélien d'ordre fini n, toute famille non vide d'éléments est liée (car, pour x dans cette famille, on a $xn = 0$) donc M n'a pas de base. La notion de base est liée à la propriété universelle suivante.

DÉFINITION. Soit X un ensemble. Un *A-module libre* sur X est la donnée d'un A-module $L(X)_A$ et d'une application $j_X : X \to L(X)$ telle que, si M est un A-module et $f : X \to M$ est une application, alors il existe un unique morphisme de A-modules $\overline{f} : L(X) \to M$ tel que $\overline{f} j_X = f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j_X"] \arrow[dr, "f"'] & L(X) \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

Il est utile de reformuler l'unicité comme suit: si $f, g : L(X) \to M$ sont deux applications linéaires telles que $f j_X = g j_X$, alors $f = g$.

LEMME 3.1. *Soit X un ensemble. Un module libre sur X, s'il existe, est unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà rencontré ce raisonnement (voir (2.1)), nous allons néanmoins le répéter. Soient L, L' deux modules libres sur X et $j : X \to L$, $j' : X \to L'$ les applications correspondantes. Il suit de la définition qu'il existe des applications A-linéaires $f : L \to L'$ et $f' : L' \to L$ telles que $j' = fj$ et $j = f'j'$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & L \\ {\scriptstyle 1_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{j'} & L' \\ {\scriptstyle 1_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ X & \xrightarrow{j} & L \end{array}$$

Mais alors $1_L j = j = f'fj$ et l'unicité donne $f'f = 1_L$. De même, $ff' = 1_L$. □

THÉORÈME 3.2. *Pour tout ensemble X, il existe un A-module libre sur X, unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'établir l'existence. Soit $L(X) = A_A^{(X)}$ (c'est-à-dire une somme directe de copies du A-module A_A, indexée par X, voir la section 2) et $j_X : X \to L(X)$, $\lambda \mapsto e^\lambda = \left(e^\lambda_\mu\right)_{\mu\in X}$ où $e^\lambda_\lambda = 1$ tandis qne $e^\lambda_\mu = 0$ si $\mu \neq \lambda$. En particulier, tout élément de $L(X)$ s'écrit $\sum\limits_{\lambda\in X} e^\lambda a_\lambda$ avec $(a_\lambda)_{\lambda\in X}$ une famille d'éléments de A à support fini. Si f est une application de X dans un A-module, la seule application linéaire $\overline{f} : L(X) \to M$ telle que $\overline{f} j_X = f$ est définie par

$$\overline{f}\left(\sum_{\lambda\in X} e^\lambda a_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in X} \overline{f}\left(e^\lambda\right) a_\lambda = \sum_{\lambda\in X} \overline{f} j_X(\lambda) a_\lambda = \sum_{\lambda\in X} f(\lambda) a_\lambda.$$

Comme cette dernière formule définit bien une application linéaire, cela achève la démonstration. □

Par abus de langage, on appellera $L(X)$ le module libre sur X. Un module L est dit *libre* s'il existe un ensemble X tel que $L \xrightarrow{\sim} L(X)$.

Un exemple est le suivant. Un élément du module libre $L(\mathbb{N})_K = K^{(\mathbb{N})}$ est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que $x_n = 0$ sauf pour un nombre fini de n, ce qui revient à dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$ entraîne $x_n = 0$. Comme par ailleurs les opérations de $K^{(\mathbb{N})}$ se font par coordonnées, on en déduit un isomorphisme de K-modules $K^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{\sim} K[t]$.

Comme nous l'avions dit, la notion de module libre est liée à celle de base.

THÉORÈME 3.3. *Un A-module L est libre si et seulement s'il possède une base.*

DÉMONSTRATION. Si $L = L(X)$ pour un X, alors $L \xrightarrow{\sim} A^{(X)}$. Ou affirme que l'ensemble des éléments $e^\lambda = \left(e^\lambda_\mu\right)_{\mu \in X}$ définis par $e^\lambda_\lambda = 1$ et $e^\lambda_\mu = 0$ si $\lambda \neq \mu$, constitue une base de L. Comme tout élément de $L(X)$ s'écrit sous la forme $\sum_{\lambda \in X} e^\lambda a_\lambda$ avec $(a_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille d'éléments de A à support fini, alors les e^λ engendrent L. Quant à l'indépendance linéaire, on observe que $\sum_{\lambda \in X} e^\lambda a_\lambda = 0$ signifie que $(a_\lambda)_{\lambda \in X} = 0$ daus $A^{(X)} \subseteq A^X$. Donc $a_\lambda = 0$ pour tout λ.

Réciproquement, si L admet une base notée $\left(e^\lambda\right)_{\lambda \in X}$, on va prouver que $L \xrightarrow{\sim} L(X)$. Soit en effet $j : X \to L$ donnée par $\lambda \mapsto e^\lambda$. Si f est une application de X dans un A-module M, on prend, pour chaque $\ell \in L$ sa décomposition (unique par définition) en combinaison linéaire des termes de la base $\ell = \sum_{\lambda \in X} e^\lambda a_\lambda$. Alors $\overline{f}$ donnée par

$$\overline{f}(\ell) = \overline{f}\left(\sum_{\lambda \in X} e^\lambda a_\lambda\right) = \overline{f}\left(\sum_{\lambda \in X} j(\lambda) a_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in X} \left(\overline{f} j\right)(\lambda) a_\lambda = \sum_{\lambda \in X} f(\lambda) a_\lambda$$

est la seule application A-linéaire telle que $\overline{f} j = f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & L \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & M \end{tikzcd} \quad . \ \square$$

On voit que, si $L = L(X)$ est un module libre sur X, alors X s'identifie à une base de L. La propriété universelle définissant un module libre s'exprime en disant qu'une application linéaire dont la source est un module libre est uniquement déterminée par les valeurs qu'elle prend snr uue base de celui-ci. C'est ce qu'on appelle en algèbre élémentaire le *théorème du prolongement linéaire.*

Nous avons un théorème classique d'existence.

PROPOSITION 3.4. *Soit A un corps (peut-être gauche). Si X engendre le A-module M et E est une partie libre contenue dans X, alors il existe une base B de M telle que $E \subseteq B \subseteq X$.*

DÉMONSTRATION. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des parties E' de M qui sont libres et telles que $E \subseteq E' \subseteq X$. Cet ensemble $\mathcal{E}$ est ordonné par inclusion et non vide (car $E \in \mathcal{E}$). Si $\mathcal{F}$ est une chaîne contenue dans $\mathcal{E}$ et $E'' = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}} Y$, alors E'' est libre (car toute partie finie de E'' est dans un Y), donc E'' est un majorant pour $\mathcal{F}$. Le lemme de Zorn entraîne que $\mathcal{E}$ a un élément maximal B. Comme B est libre, il reste à montrer que B engendre M, et pour cela il snffit de montrer (puisque X engendre M) que tout $x \in X$ est combinaison linéaire d'éléments de B. Si $x \in B$, il n'y a rien à prouver. Si $x \notin B$, la maximalité de B entraîne que

$B \cup \{x\}$ n'est pas libre, donc il existe une combinaison linéaire $xa + \sum_\lambda x_\lambda a_\lambda = 0$ avec $0 \neq a \in A$, $a_\lambda \in A$ et $x_\lambda \in B$. Par conséquent $x = -\sum_\lambda x_\lambda a_\lambda a^{-1}$. □

COROLLAIRE 3.5. *Soit A un corps (peut-être gauche). Tout A-module est libre.* □

Dans cette situation, tout A-module est un A-espace vectoriel et on vient de montrer que tout A-espace vectoriel admet une base.

PROPOSITION 3.6. *Tout A-module M est quotient d'un A-module libre L. En outre, si M est de type fini, L peut aussi être choisi de type fini.*

DÉMONSTRATION. Soient M_A un A-module et X une partie de M qui engendre celui-ci (par exemple $X = M$). L'inclusion $i : X \to M$ induit un morphisme $f : A^{(X)} \to M$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j_X"] \arrow[dr, "i"'] & A^{(X)} \arrow[d, dashed, "f"] \\ & M \end{tikzcd} .$$

Comme tout $x \in M$ est combinaison linéaire des éléments de X (et l'image de f contient X), alors f est un épimorphisme.

Si M est de type fini, et engendré par $\{x_1, \ldots, x_n\}$, on peut répéter le raisonnement avec $L = A^{(n)}$ de base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Le morphisme f est alors défini par $f(e_i) = x_i$ (où $1 \leq i \leq n$) et la propriété universelle de $A^{(n)}$. □

COROLLAIRE 3.7. *Soit M un A-module. Il existe une suite exacte $L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ avec L_0 et L_1 libres.*

DÉMONSTRATION. On applique la proposition successivement à M et au noyau de l'épimorphisme $L_0 \to M$. □

Une telle suite exacte s'appelle une *présentation libre* de M. Si en outre L_0 et L_1 sont de type fini, on dit que M est de *présentation finie*. S'il est clair que tout module de présentation finie est nécessairement de type fini, la réciproque n'est pas vraie: en effet, si M est de type fini, on peut, par (3.6), choisir L_0 de type fini, mais le noyau de $L_0 \to M$ n'est généralement pas de type fini et par conséquent L_1 non plus n'est généralement pas de type fini. On reviendra là-dessus au chapitre VI.

Une présentation libre d'un module peut être comprise comme une approximation de ce module par des modules libres. L'existence de présentations libres s'avère utile quand un calcul s'opère plus facilement sur un module libre que sur un module arbitraire à condition, bien sûr, que ce calcul soit compatible avec le passage aux conoyaux. Nous verrons plusieurs exemples de tels calculs.

Il existe un procédé standard d'utilisation de la propriété universelle définissant un module libre pour construire un foncteur $\mathrm{Ens} \to \mathrm{Mod}\, A$. Ce procédé est dit de *fonctorisation*.

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Il suit de la propriété universelle définissaut les modules libres qu'il existe un unique morphisme de A-modules $L(f) : L(X) \to L(Y)$ rendant commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & L(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L(f)} \\ Y & \xrightarrow{j_Y} & L(Y) \end{array} \quad .$$

Il est clair que $L(1_X) = 1_{L(X)}$. Soient d'autre part deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_X} & L(X) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L(f)} \\ Y & \xrightarrow{j_Y} & L(Y) \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L(g)} \\ Z & \xrightarrow{j_Z} & L(Z) \end{array} \quad .$$

Donc $L(g)L(f)j_X = j_Z gf = L(gf)j_X$ et, par l'unicité, $L(gf) = L(g)L(f)$. Ainsi $L : \text{Ens} \to \text{Mod}\, A$ est un foncteur covariant.

Cela nous permet d'énoncer de façon élégante la propriété universelle: eu effet, celle-ci dit que, pour tout A-module M et tout ensemble X, on a une bijection

$$\text{Hom}_{\text{Ens}}(X, M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(L(X), M)$$

où, à gauche, M est considéré comme un ensemble (c'est-à-dire est l'image du A-module M par le foncteur oubli $\text{Mod}\, A \to \text{Ens}$). Cela nous amèue à la définition.

DÉFINITION. Soients $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs. On dit que F est *adjoint à gauche* de G, ou que G est *adjoint à droite* de F, ou que la paire (F, G) est une *paire adjointe* si, pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ et chaque objet M de $\mathcal{D}$, il existe une bijection

$$\varphi_{X,M} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GM) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, M)$$

et que celle-ci est fonctorielle en chaque variable.

Si par exemple F et G sont covariants, la dernière phrase s'explicite en disant que si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, et $u : M \to N$ un morphisme de $\mathcal{D}$, alors les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GM) & \xrightarrow{\varphi_{X,M}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, M) \\ {\scriptstyle \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, GM)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Ff, M)} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, GM) & \xrightarrow{\varphi_{Y,M}} & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FY, M) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GM) & \xrightarrow{\varphi_{X,M}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,M) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Gu)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,u)} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GN) & \xrightarrow{\varphi_{X,N}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,N)
\end{array} \quad .$$

On a vu plus haut que le foncteur module libre $L : \mathrm{Ens} \to \mathrm{Mod}\,A$ est adjoint à gauche du foncteur oubli (la fonctorialité est un exercice facile laissé au lecteur). Nous verrons d'autres exemples d'adjonctions plus loin.

Nous achevons cette section en montrant que l'on peut définir une notion d'objet libre dans la catégorie des K-algèbres, de la même façon que nous avons défini celle de module libre.

DÉFINITION. Soit X un ensemble. Une *K-algèbre libre* sur X est la donnée d'une K-algèbre $K\langle X\rangle$ et d'une application $j_X : X \to K\langle X\rangle$ telle que, si A est une K-algèbre et $f : X \to A$ une application, alors il existe un unique morphisme de K-algèbres $\overline{f} : K\langle X\rangle \to A$ tel que $\overline{f}j = f$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & K\langle X\rangle \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME 3.8. *Pour tout ensemble X, il existe une K-algèbre libre $K\langle X\rangle$ sur X, unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. L'universalité garantissant l'unicité, il suffit de montrer l'existence. Soit $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mots sur l'alphabet $X = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, c'est-à-dire des suites finies d'éléments de X, y compris la suite vide (notée 1). On définit $K\langle X\rangle$ comme étant le K-module libre de base $\mathcal{M}(X)$: donc $K\langle X\rangle = K^{(\mathcal{M}(X))}$ en tant que K-module. Si on note $x_\sigma = x_{\lambda_1}\cdots x_{\lambda_m}$ pour toute suite d'indices $\sigma = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, chaque élément de $K\langle X\rangle$ s'écrit uniquement $x = \sum\limits_\sigma x_\sigma\alpha_\sigma$ où la somme porte sur toutes les suites finies σ d'éléments de Λ et $(\alpha_\sigma)_\sigma$ est une famille d'éléments de K à support fini. On définit la mnltiplication de deux vecteurs de base par juxtaposition: si $\sigma = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ et $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ alors $x_\sigma x_\rho = x_{\sigma\rho}$ où $\sigma\rho = (\lambda_1, \dots, \lambda_m, \rho_1, \dots, \rho_n)$ et on prolonge par bilinéarité: si $x = \sum\limits_\sigma x_\sigma\alpha_\sigma$ et $y = \sum\limits_\rho x_\rho\beta_\rho$ alors $xy = \sum\limits_{\sigma,\rho} x_{\sigma\rho}\alpha_\sigma\beta_\rho$. Il ne reste plus qu'à vérifier la propriété universelle. On prend évidemment j_X égale à l'inclusion canonique de X dans $K\langle X\rangle$. Si la paire (A, f) est comme dans la définition, le seul morphisme de K-algèbres $\overline{f} : K\langle X\rangle \to A$ tel que $\overline{f}j = f$ est donné par $\overline{f}\left(\sum\limits_\sigma x_\sigma\alpha_\sigma\right) = \sum\limits_\sigma a_\sigma\alpha_\sigma$ où, pour $\sigma = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, on a $a_\sigma = \overline{f}(x_\sigma) = f(x_{\lambda_1})f(x_{\lambda_2})\cdots f(x_{\lambda_m})$. $\square$

Par abus de langage, on dira encore que $K\langle X\rangle$ est l'*algèbre libre* sur X.

Par exemple, si $X = \{t\}$ alors $K\langle X\rangle = K[t]$. Notons que, si x et y sont deux éléments distincts de X, alors $xy \neq yx$ dans $K\langle X\rangle$: par conséquent, $K\langle X\rangle$ n'est pas commutative si $\operatorname{card} X > 1$.

4. Catégories linéaires et abéliennes.

DÉFINITION. Soit K un anneau commutatif. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite *K-linéaire* (ou simplement *linéaire*, si aucune confusion n'est à craindre) si:

(L1) Pour toute paire d'objets X, Y de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est un K-module.

(L2) La composition de $\mathcal{C}$ est compatible avec la structure de K-module des ensembles de morphismes (c'est-à-dire est K-bilinéaire):

$$g \circ (f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2) = (g \circ f_1)\,\alpha_1 + (g \circ f_2)\,\alpha_2$$
$$(g_1\beta_1 + g_2\beta_2) \circ f = (g_1 \circ f)\,\beta_1 + (g_2 \circ f)\,\beta_2$$

si $f, f_1, f_2 : X \to Y$, $g, g_1, g_2 : Y \to Z$ et $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$.

(L3) Toute famille finie d'objets de $\mathcal{C}$ admet un produit et une somme directe dans $\mathcal{C}$.

Une catégorie $\mathbb{Z}$-linéaire est dite *additive*. Donc, pour tout K, une catégorie K-linéaire est additive.

Soit X un objet d'une catégorie K-linéaire $\mathcal{C}$. Il suit de (L1) et (L2) que le K-module $\operatorname{End}_{\mathcal{C}} X$ est une K-algèbre. Nous utiliserons cette remarque par la suite.

EXEMPLES 4.1. (a) Pour toute K-algèbre A, $\operatorname{Mod} A$ est K-linéaire.

(b) Ens et Gr, comme Top, ne sont pas linéaires.

(c) On sait que $\mathrm{Ab}(= \operatorname{Mod}\mathbb{Z})$ est $\mathbb{Z}$-linéaire. Soit $\operatorname{Div}\mathbb{Z}$ la sous-catégorie pleine de Ab formée des groupes abéliens *divisibles*, c'est-à-dire des groupes G tels que $nG = G$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\operatorname{Div}\mathbb{Z}$ est aussi $\mathbb{Z}$-linéaire: il suffit de vérifier que toute famille finie de groupes divisibles a une somme directe et un produit qni sont divisibles. Soient G, H deux groupes divisibles. Alors $nG = G$ et $nH = H$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient $g \in G$, $h \in H$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g' \in G$ et $h' \in H$ tels que $g = ng'$, $h = nh'$. Donc $g + h = n(g' + h') \in n(G \oplus H)$ et $G \oplus H \subseteq n(G \oplus H)$. Comme l'inclusion inverse est triviale, on a l'égalité. De même pour le produit.

(d) On considère, pour un corps K, la catégorie des triplets (E, F, f) où E, F sont deux K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ est linéaire (voir exemple (1.1)(h)). Cette catégorie est K-linéaire.

(e) Soient K un corps et I un ensemble ordonné fini. Un *espace vectoriel filtré* est la donnée d'un K-espace vectoriel E muni d'une famille de sous-espaces $(E_i)_{i\in I}$ compatible avec l'ordre de I, c'est-à-dire telle que $i \leq j$ entraîne $E_i \subseteq E_j$. Un morphisme $f : \big(E, (E_i)_{i\in I}\big) \to \big(F, (F_i)_{i\in I}\big)$ est une application K-linéaire $f : E \to F$ telle que $f(E_i) \subseteq F_i$ pour tout i et la composition est la composition usuelle des applications. Cela donne une catégorie I-Esp qui est K-linéaire.

(f) Si $\mathcal{C}$ est K-linéaire, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ l'est aussi.

La notion naturelle de foncteurs entre catégories linéaires est évidemment celle qui préserve la structure de K-module des ensembles d'homomorphismes.

DÉFINITION. Soient K un anneau commutatif et $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories K-linéaires. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (covariant ou contravariant) est dit *K-linéaire* si, pour chaque paire de morphismes $f, g : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ et chaque paire d'éléments $\alpha, \beta \in K$, on a

$$F(f\alpha + g\beta) = F(f)\alpha + F(g)\beta.$$

En d'autres termes, un foncteur covariant (ou contravariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est K-linéaire si et seulement si, pour chaque paire d'objets X, Y de $\mathcal{C}$, l'application de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ dans $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$ (ou $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FY,FX)$, respectivement) définie par $f \mapsto Ff$ est K-linéaire (c'est-à-dire est un morphisme de K-modules).

Par exemple, si $\mathcal{C}$ est une catégorie K-linéaire et M un objet de $\mathcal{C}$, les foncteurs $\mathcal{C} \to \operatorname{Mod} K$ définis par

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M,-) &: X \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M,X), \ f \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M,f) \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,M) &: X \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,M), \ f \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(f,M) \end{aligned}$$

(voir exemple (1.2)(e)) sont K-linéaires.

Sauf si spécifié autrement, tous les foncteurs entre catégories K-linéaires que nous verrons par la suite sont K-linéaires.

Venons-en à l'axiome (L3) qui affirme l'existence de sommes et produits finis. Si on applique l'axiome (L3) à la famille vide, on voit que le produit de cette famille (unique à isomorphisme près) est un objet F tel que, pour tout X dans $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $X \to F$ (qui, d'après (L1), est nécessairement le morphisme nul): F est appelé *objet final.* De même, la somme directe de la famille vide est un objet I tel que, pour tout Y dans $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme $I \to Y$ (nécessairement nul): I est appelé *objet initial.* Donc toute catégorie K-linéaire contient un objet initial et un objet final (dont nous verrons plus loin qu'ils sont isomorphes). Par exemple, dans $\operatorname{Mod} A$, l'objet 0 est à la fois initial et final. Par analogie, on appelle *objet nul* (et on note 0) l'objet initial et final d'une catégorie linéaire.

Nous avons déjà remarqué que dans $\operatorname{Mod} A$, la somme directe et le produit d'une famille finie coïncident. Nous montrerons que c'est le cas dans toute catégorie linéaire (ce qui entraînera qu'objet initial et objet final coïncident). Pour cela, nous aurons besoin d'une définition.

DÉFINITION. Soit $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ une famille finie d'objets d'une catégorie linéaire $\mathcal{C}$. Un *biproduit* de cette famille est la donnée d'un objet X et de morphismes $p_i : X \to X_i$, $q_i : X_i \to X$ (où $1 \le i \le n$) tels que

(1) $q_1p_1 + q_2p_2 + \cdots + q_np_n = 1_X$
(2) $p_iq_j = 0$ si $i \neq j$
$p_iq_i = 1_{X_i}$ pour tout i.

Observons que cette notion est auto-duale (c'est-à-dire est identique à sa duale).

Par exemple, si $\mathcal{C} = \operatorname{Mod} A$, où A est une K-algèbre, on prend $X = \prod_{i=1}^{n} X_i = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ avec $p_i : X \to X_i$, et $q_i : X_i \to X$ respectivement la projection et l'injection canoniques.

Théorème 4.2. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire et $\{X_1, \dots, X_n\}$ une famille finie d'objets de $\mathcal{C}$. Alors $\left(X, (p_i)_{1 \le i \le n}\right)$ est un produit des X_i si et seulement s'il existe des morphismes $(q_i : X_i \to X)_{1 \le i \le n}$ tels que $\left(X, (p_i, q_i)_{1 \le i \le n}\right)$ soit un biproduit des X_i.*

Démonstration. Nécessité. Afin de définir les q_i, on considère pour $1 \le j \le n$, les morphismes $\delta_{ji} : X_i \to X_j$ définis par $\delta_{ii} = 1_{X_i}$ et $\delta_{ji} = 0$ si $i \neq j$. Par définition du produit, il existe un unique morphisme $q_i : X_i \to X$ tel que $p_j q_i = \delta_{ji}$.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, dashed, "q_i"] \arrow[dr, "\delta_{ji}"'] & X \arrow[d, "p_j"] \\ & X_j \end{tikzcd}$$

Il reste à montrer que $\sum_{i=1}^{n} q_i p_i = 1_X$. Mais $p_j \left(\sum_{i=1}^{n} q_i p_i \right) = \sum_{i=1}^{n} p_j q_i p_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji} p_i = p_j = p_j \cdot 1_X$ pour chaque $1 \le j \le n$ et l'unicité dans la définition du produit donne bien $\sum_{i=1}^{n} q_i p_i = 1_X$.

Suffisance. Il suffit de vérifier que $(X, (p_i)_i)$ satisfait la propriété universelle. Or, si $(f_i : Y \to X_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille donnée de morphismes et si $f : Y \to X$ est tel que $p_i f = f_i$ pour tout i, alors nécessairement $f = \left(\sum_{i=1}^{n} q_i p_i \right) f = \sum_{i=1}^{n} q_i f_i$.

$$\begin{tikzcd} X_i & X \arrow[l, "p_i"'] \\ & Y \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, dashed, "f"'] \end{tikzcd}$$

Réciproquement, $f = \sum_{i=1}^{n} q_i f_i$ satisfait $p_j f = f_j$ pour tout j. $\square$

THÉORÈME 4.3. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire et $\{X_1, \ldots, X_n\}$ une famille finie d'objets de $\mathcal{C}$. Alors $\left(X, (q_i)_{1\leq i\leq n}\right)$ est une somme directe des X_i si et seulement s'il existe des morphismes $(p_i : X \to X_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que $\left(X, (p_i, q_i)_{1\leq i\leq n}\right)$ soit un biproduit des X_i.*

DÉMONSTRATION. Duale de la précédente et laissée au lecteur. □

On déduit de ces deux théorèmes le corollaire suivant:

COROLLAIRE 4.4. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire. Pour toute famille finie d'objets de $\mathcal{C}$, le produit et la somme directe sont isomorphes. En particulier, l'objet initial et l'objet final de $\mathcal{C}$ sont isomorphes.* □

Ce résultat justifie d'appeler objet nul de $\mathcal{C}$ (et de noter 0) tout objet initial et final de $\mathcal{C}$. Il est clair que si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur linéaire entre deux catégories linéaires $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ on a $F(0) = 0$.

La terminologie employée pour les applications linéaires se prolonge de façon évidente aux morphismes d'une catégorie linéaire.

DÉFINITION. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire.

(i) Un morphisme f de $\mathcal{C}$ est un *monomorphisme* si $fg = fh$ implique $g = h$ on, de façon éqnivalente, si $fg = 0$ implique $g = 0$.
(ii) Un morphisme f de $\mathcal{C}$ est un *épimorphisme* si $gf = hf$ implique $g = h$ ou, de façon éqnivalente, si $gf = 0$ implique $g = 0$.

Ces notions sont évidemment duales l'une de l'autre.

EXEMPLES 4.5. (a) Dans $\operatorname{Mod} A$, les monomorphismes (on les épimorphismes) coïncident avec les morphismes injectifs (ou surjectifs, respectivement) (voir (II. 2.3)). Plus généralement, dans une catégorie concrète, les morphismes injectifs (ou surjectifs) sont des monomorphismes (ou des épimorphismes, respectivement) mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

(b) On considère la catégorie $\mathbb{Z}$-linéaire $\operatorname{Div}\mathbb{Z}$ de l'exemple (4.1)(c). Il est facile de voir que $\mathbb{Q}$ est un objet de $\operatorname{Div}\mathbb{Z}$ et que si G est un groupe abélien divisible, alors tout quotient de G l'est aussi (par exemple, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est divisible). Le morphisme canonique $p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un monomorphisme dans $\operatorname{Div}\mathbb{Z}$. En effet, si $f : G \to \mathbb{Q}$ est un morphisme non nul, alors il existe $a \in G$ tel que $f(a) = \frac{r}{s} \neq 0$ et $s \neq \pm 1$ (sinon, en effet, $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{Z}$ qui n'est pas divisible alors que $\operatorname{Im} f$ l'est). Soit $b \in G$ tel que $rb = a$. Alors $rf(b) = f(a) = \frac{r}{s}$ donne $f(b) = \frac{1}{s}$. Par conséquent $(pf)(b) \neq 0$. On a montré qne $f \neq 0$ implique $pf \neq 0$: p est bien un monomorphisme, mais n'est pas injectif.

(c) Pour les lecteurs ayant quelques notions sur les groupes topologiques, on prend $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les groupes abéliens topologiques séparés et les morphismes sont les homomorphismes continus. Elle est $\mathbb{Z}$-linéaire. On affirme qn'nn morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est un épimorphisme si et seulement si $\operatorname{Im} f$ est dense dans Y. En effet, si la fermeture Y' de $\operatorname{Im} f$ est distincte de Y, le quotient Y/Y' est un objet de $\mathcal{C}$. Soit $g : Y \to Y/Y'$ l'application canonique. Comme $Y' \neq Y$, on a $g \neq 0$. Mais $gf = 0$, donc f n'est pas un épimorphisme. Réciproquement, supposons que Z est un objet de $\mathcal{C}$ et $g : Y \to Z$ est tel que

$gf = 0 = 0f$. Alors les applications continues g et 0 coïncident sur $\operatorname{Im} f$ qui est dense dans Y. Donc $g = 0$. Par conséquent, considérons l'inclusion $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. On vient de montrer qu'elle est un épimorphisme. Elle est aussi un monomorphisme, mais bien sûr pas un isomorphisme.

Les propriétés suivantes des monomorphismes et épimorphismes sont faciles à vérifier.

(i) Si fg est un monomorphisme, g l'est aussi.
(ii) Si f et g sont des monomorphismes, et fg existe, alors fg est un monomorphisme.
(iii) Si fg est un épimorphisme, f l'est aussi.
(iv) Si f et g sont des épimorphismes, et fg existe, alors fg est un épimorphisme.
(v) Si f est un isomorphisme, alors f est un monomorphisme et un épimorphisme.

La démonstration est laissée au lecteur. Notons que la réciproque de (v) n'est pas vraie en général, comme le montrent les exemples (4.5)(b)(c). Elle est néanmoins vraie dans la catégorie $\operatorname{Mod} A$, où A est une K-algèbre.

DÉFINITIONS. Soit X un objet d'une catégorie linéaire $\mathcal{C}$. Un *sous-objet* de X est une paire (Y, f) telle que Y est un objet de $\mathcal{C}$ et $f : Y \to X$ un monomorphisme. Un *objet quotient* de X est une paire (Z, g) telle que Z est un objet de $\mathcal{C}$ et $g : X \to Z$ un épimorphisme.

Ces notions sont encore duales l'une de l'autre. Si par exemple $\mathcal{C} = \operatorname{Mod} A$, on retrouve les notions usuelles de sous-module et de module quotient. De même, on peut définir des notions de noyau et conoyau dans une catégorie linéaire.

DÉFINITION. Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'une catégorie linéaire $\mathcal{C}$. Un *noyau* de f est une paire (U, u), où U est un objet de $\mathcal{C}$ et $u : U \to X$ est un morphisme tel que:

i) $fu = 0$.
ii) Si $u' : U' \to X$ est un morphisme tel que $fu' = 0$, il existe un unique morphisme $g : U' \to U$ tel que $u' = ug$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ U' \arrow[u, dashed, "g"] \arrow[ur, "u'"'] & & \end{tikzcd}$$

Il n'est pas évident qu'un morphisme donné f ait un noyau dans $\mathcal{C}$ mais, si c'est le cas, celui-ci est unique (par un raisonnement maintenant familier) à isomorphisme près. On note alors $U = \operatorname{Ker} f$ et $u = \ker f$. Dans $\operatorname{Mod} A$, on a vu (exercice (II.10)) que cette notion coïncide avec la notion classique de noyau.

Si (U, u) est un noyau de $f : X \to Y$, alors il est un sous-objet de X: en effet, pour montrer que $u : U \to X$ est un monomorphisme, supposons $uv = 0$ avec $v : V \to U$. Alors $uv = 0 = u0$ donne, par l'unicité, $v = 0$.

$$V \overset{v}{\underset{0}{\rightrightarrows}} U \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} Y$$

La notion duale est la suivante.

DÉFINITION. Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'une catégorie linéaire $\mathcal{C}$. Un *conoyau* de f est une paire (U, u), où U est un objet de $\mathcal{C}$ et $u : Y \to U$ est un morphisme tel que:

i) $uf = 0$.
ii) Si $u' : Y \to U'$ est un morphisme tel que $u'f = 0$, il existe un unique morphisme $g : U \to U'$ tel que $gu = u'$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & U \arrow[d, dashed, "g"] \\ & & U' \end{tikzcd}$$

Il n'est pas évident qu'un morphisme donné f ait un conoyau dans $\mathcal{C}$ mais, si c'est le cas, celui-ci est unique à isomorphisme près. On note alors $U = \operatorname{Coker} f$ et $u = \operatorname{coker} f$. Dans $\operatorname{Mod} A$, on a vu (exercice (II.11)) que cette notion coïncide avec la notion classique de conoyau.

Enfin, on montre aisément que tout conoyau de $f : X \to Y$ est un objet quotient de Y.

LEMME 4.6. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire.*

(i) *f est un monomorphisme si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = 0$.
(ii) *f est un épimorphisme si et seulement si* $\operatorname{Coker} f = 0$.

DÉMONSTRATION. Résulte immédiatement des définitions. □

Nous voulons arriver à la notion de factorisation canonique d'un morphisme et pour cela, devons définir la notion d'image (ainsi que la notion duale).

DÉFINITION. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire et $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. On définit l'*image* $\operatorname{Im} f$ et la *coïmage* $\operatorname{Coim} f$ de f par:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f),$$
$$\operatorname{Coim} f = \operatorname{Coker}(\ker f).$$

Ces objets n'existent pas toujours mais, s'ils existent, sont uniques à isomorphisme près. On affirme que dans le diagramme résultant

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} f \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[r, "v"] & \operatorname{Coker} f \\ & \operatorname{Coim} f \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "j"'] & \end{tikzcd}$$

(où $p : X \to \operatorname{Coker} u$, $j : \operatorname{Ker} v \to Y$ sont les morphismes dont l'existence est assurée respectivement par la définition du conoyau et par celle du noyau) il existe un unique morphisme $\overline{f} : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ tel que $f = j\overline{f}p$. Le morphisme $\overline{f}$ est dit *canonique*, et la factorisation $f = j\overline{f}p$ est appelée la *factorisation* ou *décomposition canonique* de f.

En effet, comme $vf = 0$, il existe un morphisme $h : X \to \operatorname{Im} f$ tel que $f = jh$ (car $j = \ker v$). Alors $jhu = 0$ donne $hu = 0$ car j est un monomorphisme. Donc il existe $\overline{f} : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ tel que $\overline{f}p = h$ (car $p = \operatorname{coker} u$). On a bien $j\overline{f}p = jh = f$. Cela donne l'existence. L'unicité vient de ce que j est un monomorphisme et p un épimorphisme.

Par exemple, si $C = \operatorname{Mod} A$, alors

$$\operatorname{Coker}(\ker f) \xrightarrow{\sim} X/\operatorname{Ker} f$$

tandis que

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f) = f(X)$$

et il suit de (II. 4.1) que $\overline{f}$ est un isomorphisme. Cela nous amène à la définition.

DÉFINITION. Une catégorie K-linéaire C est dite *K-abélienne* (ou simplement *abélienne*, si aucune confusion n'est à craindre) si:

(Ab1) Tout morphisme de C admet un noyau et un conoyau.
(Ab2) Pour tout morphisme f de C, le morphisme canonique $\overline{f}$ est un isomorphisme.

Par exemple, $\operatorname{Mod} A$ est abélienne. Le lemme suivant montrera que $\operatorname{Div} \mathbb{Z}$ ne l'est pas. D'autre part, une catégorie C est abélienne si et seulement si C^{op} l'est aussi.

Dans une catégorie abélienne, si $f : X \to Y$ est un monomorphisme, on note souvent Y/X le conoyau de f.

LEMME 4.7. *Soient C une catégorie abéliennne et f un morphisme de C qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme. Alors f est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Si f est un monomorphisme, alors $\operatorname{Ker} f = 0$ et $1_X : X \to X$ est le morphisme canonique $p : X \to \operatorname{Coim} f$. De même, 1_Y est le morphisme canonique $j : \operatorname{Im} f \to Y$. L'unicité de $\overline{f}$ donne $f = \overline{f}$ et donc f est un isomorphisme. □

La notion de suite exacte se définit comme dans une catégorie de modules: une suite d'objets et de morphismes dans une catégorie abélienne

$$\cdots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

est un *complexe* si $f_i f_{i+1} = 0$ pour tout i. Elle est dite *exacte en X_i* si $\operatorname{Im} f_{i+1} = \operatorname{Ker} f_i$. Enfin, elle est dite *exacte* si elle est exacte en chaque X_i. Notons que cette définition a du sens dans des catégories telles que seul l'axiome (Ab1) est satisfait (existence de noyaux et de conoyaux): de telles catégories sont parfois dites *pré-abéliennes*.

EXEMPLES 4.8. (a) La suite $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ est exacte en X si et seulement si f est un monomorphisme.

(b) La suite $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$ est exacte en Y si et seulement si f est un épimorphisme.

(c) La suite $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si f est un isomorphisme.

(d) Une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

est dite *courte*. Pour une telle suite, f est un monomorphisme, g un épimorphisme et $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ (de même, $Z \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} f$). On dit aussi que cette suite est une *extension* de X par Z.

(e) Soient X, Z deux objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, $q_1 : X \to X \oplus Z$, $q_2 : Z \to X \oplus Z$ les injections canoniques et $p_1 : X \oplus Z \to X$, $p_2 : X \oplus Z \to Z$ les projections canoniques. On affirme que la suite

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{q_1} X \oplus Z \xrightarrow{p_2} Z \longrightarrow 0$$

est exacte. En effet, il suit de $p_1 q_1 = 1_X$ que q_1 est un monomorphisme, et de $p_2 q_2 = 1_Z$ que p_2 est un épimorphisme. Il reste à montrer que $X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker} p_2$. On a $p_2 q_1 = 0$. Soit $f : Y \to X \oplus Z$ tel que $p_2 f = 0$. Alors $f = 1_{X \oplus Z} f = (q_1 p_1 + q_2 p_2) f = q_1 p_1 f = q_1 (p_1 f)$ avec $p_1 f : Y \to X$.

Le dernier exemple se laisse généraliser.

DÉFINITION. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire.

(1) Un morphisme $f : X \to Y$ est appelé une *section* de $\mathcal{C}$ s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ de $\mathcal{C}$ tel que $gf = 1_X$.
(2) Un morphisme $f : X \to Y$ est appelé une *rétraction* de $\mathcal{C}$ s'il existe un morphisme $g : Y \to X$ de $\mathcal{C}$ tel que $fg = 1_Y$.

Ces deux notions sont duales. Toute section est un monomorphisme et toute rétraction est un épimorphisme. Tout isomorphisme est à la fois une section et une rétraction. Dans l'exemple (4.8)(e), q_1 et q_2 sont des sections tandis que p_1 et p_2 sont des rétractions. En fait, nous montrerons que ces notions sont étroitement liées à celle de somme directe.

DÉFINITION. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

est dite *scindée* s'il existe un isomorphisme $h : Y \to X \oplus Z$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "q_1"] & X \oplus Z \arrow[r, "p_2"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, où $q_1 : X \to X \oplus Z$ et $p_2 : X \oplus Z \to Z$ désignent respectivement l'injection et la projection canoniques.

THÉORÈME 4.9. *Soit* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte dans une catégorie abélienne* $\mathcal{C}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *La suite est scindée.*
(ii) f *est une section.*
(iii) g *est une rétraction.*

DÉMONSTRATION. On prouve l'équivalence de (i) et (ii), celle de (i) et (iii) se montrant dualement.

Nécessité. Supposons la suite donnée scindée, notons $q_1 : X \to X \oplus Z$, $q_2 : Z \to X \oplus Z$ les injections canoniques et $p_1 : X \oplus Z \to X$, $p_2 : X \oplus Z \to Z$ les projections canoniques. Alors $f' : Y \to X$ définie par $f' = p_1 h$ satisfait $f'f = p_1 h f = p_1 q_1 = 1_X$. Donc f est une section.

Suffisance. Soit $f' : Y \to X$ telle que $f'f = 1_X$. On cousidère $1_Y - ff' : Y \to Y$. On a $(1_Y - ff')f = f - f = 0$. Comme $g = \operatorname{coker} f$, il existe un unique $g' : Z \to Y$ tel que $1_Y - ff' = g'g$. Il suffit de moutrer que (Y, f, g', f', g) est un biproduit de X et Z (par (4.3)). Or on a $f'f = 1_X$, $gf = 0$. D'autre part, $1_Z g = g = g1_Y = g(ff' + g'g) = gg'g$. Comme g est un épimorphisme, $gg' = 1_Z$. Enfin, $g' = 1_Y g' = (ff' + g'g)g' = ff'g' + g'$ donne $ff'g' = 0$ donc $f'g' = 0$, car f est uu monomorphisme. □

Si la suite exacte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ est scindée, on a $Y \xrightarrow{\sim} X \oplus Z$. On dit qu'uu sous-objet X de Y dans $\mathcal{C}$ en est un *facteur direct* s'il existe un sous-objet X' de Y tel que $X \oplus X' \xrightarrow{\sim} Y$. Si une suite exacte courte est scindée, ses termes extrêmes sont isomorphes à des facteurs directs du terme médian.

Afin de montrer à quel point les calculs dans les catégories abéliennes ressemblent à ceux dans les catégories de modules, nous concluons cette section avec une version catégorique (et très simplifiée) du lemme des cinq (II.3.5). Elle nous sera utile en (5.4) et (5.9) plus bas.

LEMME 4.10. *Soit, dans une catégorie abélienne* $\mathcal{C}$, *un diagramme commutatif à lignes exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Si f *et* h *sont des isomorphismes, il en est de même de* g.

DÉMONSTRATION. Soit $w : W \to Y$ tel que $gw = 0$. Alors $0 = v'gw = hvw$ donne $vw = 0$ puisque h est un isomorphisme. Donc il existe $w' : W \to X$ tel que $w = uw'$. Mais alors $u'fw' = guw' = gw = 0$. Comme u', f sont des monomorphismes, $w' = 0$ et donc $w = 0$. Cela montre que g est un monomorphisme.

Supposons maintenant $w : Y' \to W$ tel que $wg = 0$. Alors $0 = wgu = wu'f$ donne $wu' = 0$ puisqne f est un isomorphisme. Donc il existe $w' : Z' \to W$ tel que $w = w'v'$. Mais alors $w'hv = w'v'g = 0$. Comme v, h sont des épimorphismes, $w' = 0$ et donc $w = 0$. Cela montre que g est un épimorphisme. Par le lemme (4.7), g est un isomorphisme. □

Une application directe est la suivante. Si, dans la définition d'une suite exacte scindée (voir plus haut), il existe un morphisme $h : Y \to X \oplus Z$ rendant le diagramme donné commutatif, alors h est nécessairement un isomorphisme.

5. Produits fibrés et sommes amalgamées.

Dans toute cette section, C désignera une catégorie K-linéaire.

DÉFINITION. Soient $f_1 : X_1 \to X$, $f_2 : X_2 \to X$ deux morphismes de C. Un *produit fibré* de f_1 et f_2 est la donnée d'un objet P et de deux morphismes $p_1 : P \to X_1$, $p_2 : P \to X_2$ tels que

(i) $f_1 p_1 = f_2 p_2$,
(ii) pour tout objet Y et toute paire de morphismes $g_1 : Y \to X_1$, $g_2 : Y \to X_2$ tels que $f_1 g_1 = f_2 g_2$, il existe un unique morphisme $g : Y \to P$ tel que $p_1 g = g_1$ et $p_2 g = g_2$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, dashed, "g"'] \arrow[drr, bend left, "g_2"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\ & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X \end{tikzcd}$$

Il suit de l'universalité dans la définition que si un tel produit existe, il est unique à isomorphisme près.

EXEMPLES 5.1. (a) Soit $f : X \to Y$ un morphisme. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

définit un produit fibré si et seulement si (P, p) est un noyau de f: les noyaux sont donc des cas particuliers de produits fibrés.

(b) Soient X_1, X_2 deux objets et $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ les projections canoniques. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_1 \times X_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X_2 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

définit un produit fibré: les produits sont donc des cas particuliers de produits fibrés.

Nous montrerons que, réciproquement, tout produit fibré peut être construit à l'aide de produits et de noyaux.

THÉORÈME 5.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire dans laquelle tout morphisme admet un noyau. Alors toute paire de morphismes de $\mathcal{C}$ admet un produit fibré.*

DÉMONSTRATION. Soit $f_1 : X_1 \to X$, $f_2 : X_2 \to X$ une paire de morphismes. Notons ici $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ et $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ les projections canoniques. Nous montrerons que le noyau (P, p) de $f_1\pi_1 - f_2\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X$ définit le produit fibré cherché.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dd, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "p"] & & X_2 \arrow[dd, "f_2"] \\ & X_1 \times X_2 \arrow[ur, "\pi_2"'] \arrow[dl, "\pi_1"] & \\ X_1 \arrow[rr, "f_1"'] & & X \end{tikzcd}$$

Posons $p_1 = \pi_1 p$ et $p_2 = \pi_2 p$. On a bien $(f_1\pi_1 - f_2\pi_2)\, p = 0$, donc

$$f_1 p_1 = f_1 \pi_1 p = f_2 \pi_2 p = f_2 p_2.$$

Supposons (Y, g_1, g_2) comme dans la définition. Il existe un unique

$$u : Y \to X_1 \times X_2$$

tel que $\pi_1 u = g_1$, $\pi_2 u = g_2$. Donc $f_1 g_1 = f_2 g_2$ entraîne $(f_1\pi_1 - f_2\pi_2)\, u = 0$, d'où un unique $g : Y \to P$ tel que $pg = u$. Par conséquent, $p_1 g = \pi_1 p g = \pi_1 u = g_1$ et de même $p_2 g = g_2$. Enfin, si $p_1 g = p_1 g'$ et $p_2 g = p_2 g'$, alors $p_1 (g - g') = 0$ et $p_2 (g - g') = 0$ donnent $\pi_1 p (g - g') = 0$ et $\pi_2 p (g - g') = 0$. Par conséquent, $p(g - g') = 0$. Comme p est un monomorphisme, $g - g' = 0$ et $g = g'$. $\square$

COROLLAIRE 5.3. *Dans une catégorie abélienne, toute paire de morphismes admet un produit fibré.* $\square$

Par exemple, dans $\operatorname{Mod} A$, toute paire de morphismes (f_1, f_2) admet un produit fibré P et la construction précédente donne

$$P = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid f_1 (x_1) = f_2 (x_2)\}$$

et p_1, p_2 ne sont autres que les restrictions à P des projections canoniques de $X_1 \times X_2$ sur X_1 et X_2 respectivement.

LEMME 5.4. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\ X_1 \arrow[r, "f_1"] & X \end{tikzcd}$$

un produit fibré de f_1 et f_2. Alors:

(i) *Si f_1 est un monomorphisme, p_2 l'est aussi.*
(ii) *Si f_1 est un épimorphisme, p_2 l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. (i) Si $u : U \to P$ est tel que $p_2 u = 0$, alors $f_1 p_1 u = f_2 p_2 u = 0$ donne $p_1 u = 0$, car f_1 est un monomorphisme. L'unicité donne alors $u = 0$.

(ii) Soit la suite

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{p} X_1 \times X_2 \xrightarrow{v} X \longrightarrow 0$$

où $v = f_1\pi_1 - f_2\pi_2$ (comme dans la démonstration de (5.2), $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ et $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ désignent les projections canoniques) et $p = \ker v$. Elle est exacte, car v est un épimorphisme (si en effet $\kappa_1 : X_1 \to X_1 \times X_2$ désigne l'injection canonique, alors $v\kappa_1 = f_1$ est un épimorphisme) et d'autre part p est le noyau de v. Soit $w : X_2 \to W$ tel que $wp_2 = 0$. Alors $p_2 = \pi_2 p$ donne $w\pi_2 p = 0$. Par conséquent, il existe $g : X \to W$ tel que $gv = w\pi_2$. Or $gf_1 = gv\kappa_1 = w\pi_2\kappa_1 = 0$. Comme f_1 est un épimorphisme, $g = 0$. Mais alors $w\pi_2 = 0$ donne $w = 0$, puisque π_2 est un épimorphisme. □

THÉORÈME 5.5. *Soit C une catégorie abélienne. À un diagramme*

$$\begin{tikzcd}
& & & X_2 \arrow[d, "f_2"] & \\
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "f_0"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

avec la ligne du bas exacte correspond un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "1_{X_0}"'] & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "f_0"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où (P, p_1, p_2) est un produit fibré de f_1 et f_2.

Réciproquement, tout diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "p'_0"] \arrow[d, "1_{X_0}"'] & P' \arrow[r, "p'_2"] \arrow[d, "p'_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "f_0"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est de cette forme: il existe un isomorphisme $f : P' \xrightarrow{\sim} P$ tel que $p_0 = fp'_0$, $p_1 f = p'_1$, $p_2 f = p'_2$.

DÉMONSTRATION. Soit un diagramme à ligne exacte

$$\begin{tikzcd}
& & & X_2 \arrow[d, "f_2"] & \\
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "f_0"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Pour compléter ce diagramme comme requis, on utilise le fait que, par (5.4), p_2 est un épimorphisme, et la propriété universelle de P appliquée à $f_0 : X_0 \to X_1$ et au morphisme nul $X_0 \to X_2$. Il reste à prouver que $p_0 = \ker p_2$. Par construction, $p_2p_0 = 0$. Soit $u : U \to P$ tel que $p_2u = 0$. Alors $f_1p_1u = f_2p_2u = 0$. Donc il existe $u' : U \to X_0$ tel que $f_0u' = p_1u$. On a $p_2p_0u' = 0 = p_2u$ et $p_1p_0u' = f_0u' = p_1u$. Par l'unicité, $p_0u' = u$. Cela montre l'existence de u'. Son unicité vient de ce que, $p_1p_0 = f_0$ étant un monomorphisme, p_0 l'est aussi.

Pour la réciproque, on note que le diagramme commutatif à ligues exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[rr, "p_0"] \arrow[dd, "1"'] & & P \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dd, "p_1"'] & & X_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "f_2"'] & & 0 & \\
& 0 \arrow[r] & X_0 \arrow[ul, "1"] \arrow[dl, "1"] \arrow[rr, "p_0'"] & & P' \arrow[ul, dashed, "f"'] \arrow[dl, "p_1'"] \arrow[rr, "p_2'"] & & X_2 \arrow[ul, "1"] \arrow[dl, "f_2"] \arrow[r] & 0 & \\
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[rr, "f_0"] & & X_1 \arrow[rr, "f_1"] & & X \arrow[rr] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

et la propriété universelle du produit fibré donnent un morphisme $f : P' \to P$ tel que $p_1f = p_1'$ et $p_2f = p_2'$. D'autre part, $p_1(fp_0') = p_1'p_0' = f_0 = p_1p_0$ et $p_2(fp_0') = p_2'p_0' = 0 = p_2p_0$ d'où, par l'unicité, $fp_0' = p_0$. Le diagramme du haut est donc commutatif. Par (4.10), f est un isomorphisme. $\square$

La notion duale de celle de produit fibré est la suivaute:

DÉFINITION. Soient $f_1 : X \to X_1$, $f_2 : X \to X_2$ deux morphismes d'une catégorie linéaire $\mathcal{C}$. Une *somme amalgamée* de f_1 et f_2 est la donnée d'un objet Q et de deux morphismes $q_1 : X_1 \to Q$, $q_2 : X_2 \to Q$ tels que:

(i) $q_1f_1 = q_2f_2$,
(ii) pour tout objet Y et toute paire de morphismes $g_1 : X_1 \to Y$, $g_2 : X_2 \to Y$ tels que $g_1f_1 = g_2f_2$, il existe un unique morphisme $g : Q \to Y$ tel que $gq_1 = g_1$ et $gq_2 = g_2$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "q_2"] \arrow[ddr, bend left, "g_2"] & \\
X_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[drr, bend right, "g_1"'] & Q \arrow[dr, dashed, "g"'] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Si la somme amalgamée de deux morphismes existe, elle est unique à isomorphisme près. On montre que conoyaux et sommes directes sont des cas particuliers de sommes amalgamées. En outre, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 5.6. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire dans laquelle tout morphisme admet un conoyau. Alors toute paire de morphismes admet une somme amalgamée.*

DÉMONSTRATION. Soient $\kappa_1 : X_1 \to X_1 \oplus X_2$, $\kappa_2 : X_2 \to X_1 \oplus X_2$ les injections canoniques. Uue démonstration duale à celle de (5.2) montre que Q est fourui par le conoyau de $\kappa_1f_1 - \kappa_2f_2 : X \to X_1 \oplus X_2$. $\square$

COROLLAIRE 5.7. *Dans une catégorie abélienne, toute paire de morphismes admet une somme amalgamée.* □

Par exemple, dans $\mathrm{Mod}\,A$, toute paire de morphismes admet une somme amalgamée et la construction de (5.6) donne $Q = (X_1 \oplus X_2)/X'$ avec $X' = \left\{ \begin{bmatrix} f_1(x) \\ -f_2(x) \end{bmatrix} \in X_1 \oplus X_2 \mid x \in X \right\}$.

LEMME 5.8. *Soient C une catégorie abélienne et*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ X_1 & \xrightarrow{q_1} & Q \end{array}$$

une somme amalgamée de f_1 et f_2. Alors:

(i) *Si f_2 est un épimorphisme, q_1 l'est aussi.*
(ii) *Si f_2 est un monomorphisme, q_1 l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. Duale de celle de (5.4) et laissée au lecteur. □

THÉORÈME 5.9. *Soit C une catégorie abélienne. À un diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{f_0} & X_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & & & & & \\ & & X_2 & & & & & & \end{array}$$

avec la ligne du haut exacte correspond un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{f_0} & X_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_1} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{X_0}} & & \\ 0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{q_2} & Q & \xrightarrow{q_0} & X_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où (Q, q_1, q_2) est une somme amalgamée de f_1 et f_2.

Réciproquement, tout diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \xrightarrow{f_0} & X_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_1'} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{X_0}} & & \\ 0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{q_2'} & Q' & \xrightarrow{q_0'} & X_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est de cette forme, il existe un isomorphisme $f : Q \xrightarrow{\sim} Q'$ tel que $q_0 = q_0' f$, $fq_1 = q_1'$, $fq_2 = q_2'$.

DÉMONSTRATION. Duale de celle de (5.5) et laissée au lecteur. □

6. Équivalences de catégories.

Dans cette dernière section, nous considérons la notion d'équivalence entre catégories. Celle-ci correspond à la notion d'isomorphisme entre objets. Il existe une généralisation évidente de cette dernière notion: deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont dites isomorphes s'il existe un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ admettant un inverse (c'est-à-dire, un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tel que $FG = 1_{\mathcal{D}}$ et $GF = 1_{\mathcal{C}}$). Malheureusement, cette définition est trop restreinte pour la plupart des applications que nons avons en vue: en effet, elle ne tient pas compte du fait essentiel qu'à l'intérieur d'une catégorie, deux objets isomorphes devraient être à toutes fins utiles interchangeables. Pour expliquer cette remarque, considérons une catégorie $\mathcal{C}$: on appelle *squelette* de $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$ dont la classe d'objets contient un objet et un seul de chaque classe d'objets isomorphes dans $\mathcal{C}$. Par exemple, si $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps commutatif K, un squelette de $\mathcal{C}$ est fourni par la sous-catégorie pleine formée des K-espaces vectoriels de la forme K^n (avec $n \in \mathbb{N}$). Il suit de l'axiome du choix que toute catégorie $\mathcal{C}$ admet un squelette. D'autre part, deux squelettes de $\mathcal{C}$ sont isomorphes. Si on veut travailler à isomorphisme près, une catégorie $\mathcal{C}$ et un squelette $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$ devraient avoir les mêmes propriétés. Or $\mathcal{S}$ n'est généralement pas isomorphe à $\mathcal{C}$, car un isomorphisme induirait une bijection entre les classes d'objets de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{S}$. Par contre, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont équivalentes au sens de la définition suivante.

DÉFINITION. Deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont dites *équivalentes* s'il existe deux foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et deux isomorphismes fonctoriels $FG \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{D}}$ et $GF \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{C}}$. Les foncteurs F et G sont alors dits *quasi-inverses*.

Notre objectif est de donner un critère permettant de vérifier quand deux catégories sont équivalentes. Pour cela, nous avons besoin de quelques définitions. On sait que tout foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induit, pour chaque paire d'objets X, Y de $\mathcal{C}$, une application $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ définie par $f \mapsto Ff$. Le foncteur F est dit *fidèle* (ou *plein*) si cette application est injective (ou surjective, respectivement). Il est dit *dense* si, pour chaque objet M de $\mathcal{D}$, il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que $M \xrightarrow{\sim} FX$.

Un exemple permettra d'illustrer ces concepts. Soient A, B deux K-algèbres, et $\varphi : A \to B$ un morphisme d'algèbres. On définit un foncteur $F : \mathrm{Mod}\, B \to \mathrm{Mod}\, A$ comme suit: à tout B-module M, on associe un A-module FM ayant la même structure de K-module que M mais où la multiplication par les éléments de A est définie par

$$xa = x\varphi(a)$$

(pour $x \in M$, $a \in A$). Ce foncteur est parfois appelé foncteur de *changement des scalaires* (voir (II.1.3)(g)). Un cas particulier important est celui où φ est surjectif: c'est le cas si et seulement si $B \xrightarrow{\sim} A/I$, pour I un idéal bilatère de A. On a le lemme suivant:

LEMME 6.1. *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'algèbres, et soient M, N deux B-modules.*

(a) *Si $f : M \to N$ est B-linéaire, alors $f : M \to N$ est aussi A-linéaire. Si φ est surjectif, le foncteur de changement des scalaires induit une bijection* $\mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(M, N)$.
(b) *Si N_B est un sous-module de M_B, alors N_A est aussi un sous-module de M_A. Si φ est surjectif, les treillis de sous-modules de M_B et de M_A sont égaux.* □

La démonstration est un exercice facile laissé au lecteur. En particulier, si φ est surjectif, on voit que le foncteur de changement des scalaires $\mathrm{Mod}\, B \to \mathrm{Mod}\, A$ est plein et fidèle. Il est toutefois évident que ce foncteur n'est généralement pas dense: A_A n'est isomorphe à aucun B-module muni de la structure induite: en effet, si c'était le cas, il suivrait de (b) que $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ et donc $A \xrightarrow{\sim} B$.

Nous arrivons au critère cherché.

THÉORÈME 6.2. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une équivalence si et seulement si F est fidèle, plein et dense.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. Il est trivial que F soit dense: si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est un quasi-inverse de F, on n'a qu'à poser pour un objet M de $\mathcal{D}$, $X = GM$ et alors on a $FX \xrightarrow{\sim} M$.

Montrons la fidélité. Soient $f_1, f_2 : X \to Y$ deux morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $Ff_1 = Ff_2$. Alors $GF \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{C}}$ donne des isomorphismes $\varphi_X : GFX \xrightarrow{\sim} X$ et $\varphi_Y : GFY \xrightarrow{\sim} Y$ tels que $f_1 = \varphi_Y\,(GFf_1)\,\varphi_X^{-1}$ et $f_2 = \varphi_Y\,(GFf_2)\,\varphi_X^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} GFX \arrow[r, "\sim\ \varphi_X"] \arrow[d, "GFf_i"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\ GFY \arrow[r, "\sim\ \varphi_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Par conséquent, $f_1 = \varphi_Y\,(GFf_1)\,\varphi_X^{-1} = \varphi_Y\,(GFf_2)\,\varphi_X^{-1} = f_2$. Donc F est fidèle. De même, G est fidèle. Soit $u : FX \to FY$ un morphisme de $\mathcal{D}$. Pour $Gu : GFX \to GFY$, on pose $f = \varphi_Y(Gu)\varphi_X^{-1} : X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} GFX \arrow[r, "\sim\ \varphi_X"] \arrow[d, "Gu"'] & X \arrow[d, dashed, "f"] \\ GFY \arrow[r, "\sim\ \varphi_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Comme $GFf = \varphi_Y^{-1} f \varphi_X = Gu$ et G est fidèle, $u = Ff$. Donc F est plein. De même, G est plein.

Suffisance. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ plein, fidèle et dense. Pour montrer que F est une équivalence, il faut construire un foncteur quasi-iuverse $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Soit M un objet de $\mathcal{D}$. Il existe X dans $\mathcal{C}$ tel que $M \xrightarrow{\sim} FX$. On se fixe un isomorphisme $\varphi_M : M \xrightarrow{\sim} FX$ et on pose $X = GM$. Soient $u : M \to N$ un morphisme de $\mathcal{D}$, $X = GM$ et $Y = GN$. On cherche $f : X \to Y$ tel que $Gu = f$. On veut que la famille (φ_M) définisse un morphisme fonctoriel. On doit avoir un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sim\ \varphi_M"] \arrow[d, "u"'] & FGM \arrow[d, "FGu=Ff"] \\ N \arrow[r, "\sim\ \varphi_N"] & YFGN \end{tikzcd}$$

et donc $Ff = \varphi_N u \varphi_M^{-1}$. Comme F est plein, il existe un tel f. Comme F est fidèle, f est unique. Cela définit bien G.

Il faut maintenant vérifier que G est un foncteur, c'est-à-dire que $G(vu) = G(v)G(u)$ où $u : L \to M$ et $v : M \to N$ sont deux morphismes de $\mathcal{D}$. Puisque F est fidèle, il suffit pour cela de vérifier que $FG(vu) = F[G(v)G(u)]$ et ceci résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\sim\ \varphi_L"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dd, bend right=60, "vu"'] & FX \arrow[d, "FGu"] \arrow[dd, bend left=60, "FG(vu)"] \\ M \arrow[r, "\sim\ \varphi_M"] \arrow[d, "v"'] & FY \arrow[d, "FGv"] \\ N \arrow[r, "\sim\ \varphi_N"] & FZ \end{tikzcd}.$$

Par définition de G, la famille (φ_M) définit un isomorphisme fonctoriel de $1_{\mathcal{D}}$ dans FG.

Il reste à définir un isomorphisme fonctoriel $GF \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{C}}$. Soit $M = FX$, où X est un objet de $\mathcal{C}$. Il existe un isomorphisme $\varphi_M : M \xrightarrow{\sim} FY$, où $Y = GM$. Puisque F est plein et fidèle, il existe un unique morphisme $\psi_X : X \to Y = GFX$ tel que $F\psi_X = \varphi_M$. On prouve que ψ_X est un isomorphisme: soit, en effet, l'inverse φ_M^{-1} de φ_M, comme F est plein et fidèle, il existe un unique morphisme $\psi'_X : Y \to X$ tel que $F\psi'_X = \varphi_M^{-1}$. Alors $F(\psi_X\psi'_X) = F\psi_X \cdot F\psi'_X = \varphi_M\varphi_M^{-1} = 1_{FY} = F(1_Y)$. Comme F est fidèle, $\psi_X\psi'_X = 1_Y$. De même, $\psi'_X\psi_X = 1_X$.

Enfin, on doit vérifier que, pour tout morphisme $f : X \to Y$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sim\ \psi_X"] \arrow[d, "f"'] & GFX \arrow[d, "GFf"] \\ Y \arrow[r, "\sim\ \psi_Y"] & GFY \end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme F est fidèle, il suffit de vérifier que $FGF(f)F\psi_X = F\psi_Y \cdot Ff$, c'est-à-dire que $FGF(f) \cdot \varphi_{FX} = \varphi_{FY} \cdot Ff$, et cette égalité résulte de la commutativité du carré

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\sim\ \varphi_M"] \arrow[d, "u"'] & FX \arrow[d, "FGu=FGFf"] \\ N \arrow[r, "\sim\ \varphi_N"] & FY \end{tikzcd}$$

où $M = FX$, $N = FY$ et $f = Fu$. □

Afin de mieux illustrer ces concepts, nous nous proposons de résoudre un exemple en détail.

EXEMPLE 6.3. Soit K un corps commutatif. On considère la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les triplets (E, F, f) avec E, F deux K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application K-linéaire. Comme on l'a vu en (4.1)(d), cette catégorie est K-linéaire. On peut en fait prouver qu'elle est abélienne. Nous montrerons que $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des modules sur l'algèbre de matrices triangulaires $A = T_2(K) = [\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}] = \{[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}] \mid a, b, c \in K\}$.

Commençons par observer que les matrices $\mathbf{e}_{11} = [\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}]$, $\mathbf{e}_{22} = [\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}]$ et $\mathbf{e}_{21} = [\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]$ forment une K-base de A, que $\mathbf{1} = \mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22}$ et que

	$\mathbf{e}_{11}$	$\mathbf{e}_{22}$	$\mathbf{e}_{21}$
$\mathbf{e}_{11}$	$\mathbf{e}_{11}$	0	0
$\mathbf{e}_{22}$	0	$\mathbf{e}_{22}$	$\mathbf{e}_{21}$
$\mathbf{e}_{21}$	$\mathbf{e}_{21}$	0	0

est la table de multiplication de la base. Soit M_A uu A-module, on a une égalité de K-espaces vectoriels $M = M\mathbf{e}_{11} \oplus M\mathbf{e}_{22}$: en effet, tout $x \in M$ s'écrit $x = x \cdot \mathbf{1} = x\mathbf{e}_{11} + x\mathbf{e}_{22}$ et $x\mathbf{e}_{11} = y\mathbf{e}_{22}$ donne $x\mathbf{e}_{11} = x\mathbf{e}_{11}^2 = y\mathbf{e}_{22}\mathbf{e}_{11} = 0$. Posons $E = M\mathbf{e}_{22}$ et $F = M\mathbf{e}_{11}$, on a alors une applicatiou K-linéaire $f : E \to F$ définie par $f\,(x\mathbf{e}_{22}) = (x\mathbf{e}_{22})\,\mathbf{e}_{21} = (x\mathbf{e}_{21})\,\mathbf{e}_{11}$. Pour un morphisme de A-modules $u : M \to N$, où M donne (E, F, f) et N donue (E', F', f') on a, pour $x \in M$,

$$u(x) = u\,(x\mathbf{e}_{11} + x\mathbf{e}_{22}) = u(x)\mathbf{e}_{11} + u(x)\mathbf{e}_{22}$$

avec $u(x)\mathbf{e}_{11} \in F'$ et $u(x)\mathbf{e}_{22} \in E'$. On a donc deux applications K-linéaires définies comme étant les restrictions de u à E et F: $w = u|_F : F \to F'$ et $v = u|_E : E \to E'$. Il faut montrer que le carré suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"'] & F \arrow[d, "w"] \\ E' \arrow[r, "f'"] & F' \end{tikzcd}$$

Or, pour $x\mathbf{e}_{22} \in E$, on a $(f'v)\,(x\mathbf{e}_{22}) = f'\,(v(x)\mathbf{e}_{22}) = u(x)\mathbf{e}_{21}$ et $(wf)\,(x\mathbf{e}_{22}) = w\,(x\mathbf{e}_{21}) = u\,(x\mathbf{e}_{21}) = u(x)\mathbf{e}_{21}$. Par conséquent, $f'v = wf$ et $(v, w) : (E, F, f) \to (E', F', f')$ est bien un morphisme de $\mathcal{C}$.

On pose donc $\Phi(M) = (E, F, f)$ et $\Phi(u) = (v, w)$. Il est clair que cela doune un foncteur $\operatorname{Mod} A \to \mathcal{C}$. On prouvera que c'est une équivalence. Montrons d'abord qu'il est plein et fidèle. Si $u : M \to N$ est tel que $\Phi(u) = (v, w)$ alors, pour tout $x \in M$, $x = x\mathbf{e}_{11} + x\mathbf{e}_{22}$ doune

$$u(x) = u\,(x\mathbf{e}_{11} + x\mathbf{e}_{22}) = u\,(x\mathbf{e}_{11}) + u\,(x\mathbf{e}_{22}) = w\,(x\mathbf{e}_{11}) + v\,(x\mathbf{e}_{22})\,.$$

Or cette formule donne une unique application K-linéaire $u : M \to N$ dont il reste à moutrer qu'elle est A-linéaire. Pour cela, il suffit de montrer que $u(x)\mathbf{e}_{11} = u\,(x\mathbf{e}_{11})$, $u(x)\mathbf{e}_{22} = u\,(x\mathbf{e}_{22})$, $u(x)\mathbf{e}_{21} = u\,(x\mathbf{e}_{21})$. La première égalité suit de $u\,(x\mathbf{e}_{11}) = w\,(x\mathbf{e}_{11})\,\mathbf{e}_{11} = u(x)\mathbf{e}_{11}$. De même pour la seconde. Quant à la troisième, $u(x)\mathbf{e}_{21} = v\,(x\mathbf{e}_{22})\,\mathbf{e}_{21} = (f'v)\,(x\mathbf{e}_{22}) = (wf)\,(x\mathbf{e}_{22}) = w\,(x\mathbf{e}_{22}\mathbf{e}_{21}) =$

$w(x\mathbf{e}_{21}) = u(x\mathbf{e}_{21})$ (où f et f' notent respectivement les applications structurelles de $\Phi(M)$ et $\Phi(N)$).

Il reste à montrer que Φ est dense. Soit (E, F, f) un objet de $\mathcal{C}$. On munit le K-espace vectoriel $M = F \oplus E$ d'une structure de A-module par

$$x\mathbf{e}_{11} = (z,y)\mathbf{e}_{11} = z, \; x\mathbf{e}_{22} = (z,y)\mathbf{e}_{22} = y \text{ et } x\mathbf{e}_{21} = (z,y)\mathbf{e}_{21} = f(y)$$

pour $x = (z, y) \in M$ (où $z \in F$ et $y \in E$).

Donc, pour $x = (z, y) \in M$ et $\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right] \in A$, on a

$$(z,y)\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = (za + f(y)b, yc).$$

Il est clair que $\Phi(M) \xrightarrow{\sim} (E, F, f)$.

Nous achevons cette section avec les notions d'idéal et de quotient d'une catégorie K-linéaire, qui nous permettront de prouver un analogue du théorème d'isomorphisme pour les K-algèbres.

DÉFINITION. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie K-linéaire. Un *idéal* bilatère $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ est défini par la donnée pour chaque paire X, Y d'objets de $\mathcal{C}$ d'un sous-K-module $\mathcal{I}(X, Y)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tel que:

(i) $f \in \mathcal{I}(X, Y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ entraînent $gf \in \mathcal{I}(X, Z)$,
(ii) $f \in \mathcal{I}(X, Y)$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ entraînent $fh \in \mathcal{I}(W, Y)$.

En d'autres termes, $\mathcal{I}$ est stable à gauche et à droite pour la composition des morphismes.

Étant donné un idéal bilatère $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$, on définit la *catégorie quotient* $\mathcal{C}/\mathcal{I}$: c'est la catégorie dont les objets sont les mêmes que ceux de $\mathcal{C}$, et les morphismes de X vers Y sont donnés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/\mathcal{I}(X, Y).$$

Enfin, la composition des morphismes est induite de celle de $\mathcal{C}$. On vérifie sans peine que $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ est bien une catégorie K-linéaire, et que le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{I}$ (dit de *projection*) appliquant chaque objet sur lui-même et chaque morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ sur sa classe $f + \mathcal{I}(X, Y) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(X, Y)$ est un foncteur K-linéaire, plein et dense (mais évidemment non fidèle).

Soient par exemple $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories K-linéaires et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur K-linéaire. On définit le *noyau* de F comme étant l'idéal $\mathrm{Ker}\, F$ de $\mathcal{C}$ formé de tous les morphismes f tels que $F(f) = 0$. On vérifie de suite que $\mathrm{Ker}\, F$ est bien un idéal bilatère de $\mathcal{C}$. Par exemple, si $\mathcal{I}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{C}$, le noyau de la projection $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{I}$ est égal à $\mathcal{I}$.

PROPOSITION 6.4. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories K-linéaires et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur K-linéaire, plein et dense. Alors il existe une unique équivalence $F' : \mathcal{C}/\mathrm{Ker}\, F \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ telle que $F'P = F$ où $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathrm{Ker}\, F$ est la projection.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{D} \\ \mathcal{C}/\operatorname{Ker} F \arrow[ur, dashed, "F'"'] & \end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que si F' est un foncteur tel que $F'P = F$ alors, pour tout objet X de $\mathcal{C}/\operatorname{Ker} F$, c'est-à-dire de $\mathcal{C}$, on a $F'X = FX$ et pour tout morphisme $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ on a $F'(f + (\operatorname{Ker} F)(X,Y)) = Ff$. Comme ces relations définissent évidemment un foncteur K-linéaire, et que celui-ci est évidemment plein et dense (parce que F l'est), il reste à montrer que F' est fidèle. Mais $F'(f + (\operatorname{Ker} F)(X,Y)) = 0$ donne $Ff = 0$ et donc $f \in (\operatorname{Ker} F)(X,Y)$. Cela achève la démonstration. $\square$

Exercices du Chapitre III.

1. Montrer que dans Ab, les épimorphismes sont les morphismes surjectifs et les monomorphismes sont les morphismes injectifs.

2. Soit, dans une catégorie $\mathcal{C}$, une relation d'équivalence $\sim$ définie sur chaque ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et compatible avec la composition (c'est-à-dire que si $f \sim g$ et $f' \sim g'$ alors $ff' \sim gg'$, si ces compositions existent). Montrer comment former une catégorie quotient $\mathcal{C}/\sim$, dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$ et les morphismes sont les classes d'équivalence de morphismes de $\mathcal{C}$.

3. Montrer que Ens a un objet initial et un objet final, mais pas d'objet nul.

4. Supposons que toutes les faces du cube suivant (d'une catégorie K-linéaire) sauf peut-être celle du haut sont commutatives

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & X_2 \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
& X_3 \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_4 \arrow[dd] \\
X_5 \arrow[rr] \arrow[dr] & & X_6 \arrow[dr] & \\
& X_7 \arrow[rr] & & X_8
\end{tikzcd}$$

et que $X_4 \to X_8$ est un monomorphisme. Montrer que la face supérieure est commutative.

5. Montrer que dans $\mathrm{Alg}\, K$, un nombre fini d'objets admet un produit.

6. Soient M un A-module et $f \in \mathrm{End}\, M$ tel que $f^2 = f$ (on dit que f est idempotent). Montrer que $M = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$. Réciproquement, s'il existe une décomposition $M = M_1 \oplus M_2$ avec $M_1 \neq 0$, montrer que la composition f de la projection de $M = M_1 \oplus M_2$ sur M_1 avec l'inclusion $M_1 \to M$ satisfait $\mathrm{Im}\, f \xrightarrow{\sim} M_1$, $\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\sim} M_2$ et $f^2 = f$.

7. Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de sous-modules d'un module M. Montrer que $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ si et seulement si

(i) $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, et

(ii) $M_{\lambda_0} \cap (M_{\lambda_1} + \cdots + M_{\lambda_n}) = 0$ pour toute partie finie $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de Λ et $\lambda_0 \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

8. Soit A une K-algèbre commutative. Montrer que deux bases d'un A-module libre ont même cardinal.

9. Supposons $M = L \oplus N$ et $L \subseteq L' \subseteq M$. Montrer que $L' = L \oplus (L' \cap N)$.

10. Soient $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ trois familles de A-modules telles que,

pour chaque $\lambda \in \Lambda$, il existe une snite exacte

$$L_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} N_\lambda.$$

Montrer que les suites

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda \xrightarrow{f} \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \xrightarrow{g} \prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$$

et

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda \xrightarrow{f'} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \xrightarrow{g'} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$$

(où f, g, f', g' sont indnites de f_λ, g_λ et des propriétés universelles) sont exactes.

11. Pour un entier positif $n = rs$, montrer que la suite exacte de $\operatorname{Mod}\mathbb{Z}_n$

$$0 \longrightarrow r\mathbb{Z}_n \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{g} s\mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

(f l'inclusion, g la multiplication par s) est scindée si et seulement si r et s sont copremiers.

12. Montrer qu'une suite exacte courte de modules

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

est scindée si et seulement s'il existe des morphismes $g' : N \to M$ et $f' : M \to L$ tels que $ff' + g'g = 1_M$.

13. (Petit lemme des cinq) Soit, dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \longrightarrow & 0
\end{array} .$$

Montrer que, si f, h sont des monomorphismes (ou des épimorphismes), il en est de même de g.

14. Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de $\operatorname{Mod} A$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' & \longrightarrow & 0
\end{array} .$$

Montrer que, étant donnés f et h, le morphisme g est nniquement déterminé modulo un morphisme arbitraire $N \to L'$.

15. Soient L, N deux sous-modules d'un module M. Montrer qu'il existe des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow L \cap N \longrightarrow L \oplus N \xrightarrow{f} L + N \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M/L \cap N \longrightarrow M/L \oplus M/N \xrightarrow{g} M/(L+N) \longrightarrow 0$$

où $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x - y$ et $g(x+L, y+N) = (x-y) + (L+N)$.

16. Soient L, N deux sous-modules d'un module M. Montrer que, si $L+N$ et $L \cap N$ sont de type fini, alors L et N sont aussi de type fini.

17. Soient I, J deux idéaux à droite d'une K-algèbre A tels que $I + J = A$. Montrer que $I \oplus J \xrightarrow{\sim} A \oplus (I \cap J)$.

18. Soient L, N deux sous-modules de M tels que $L \cap N$ est facteur direct de L et N. Montrer que $L \cap N$ est facteur direct de $L + N$.

19. Soient L, N deux sous-modules de M. Montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L \cap N \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & L/(L \cap N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N/(L \cap N) \arrow[r] \arrow[d] & M/L \arrow[r] \arrow[d] & M/(L+N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

avec tous les morphismes induits des inclusions et des projections, est commutatif et à lignes et colonnes exactes.

20. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire. Montrer que si f, g sont deux morphismes tels que fg est une rétraction (ou une section), alors f est une rétraction (ou g est une section, respectivement).

21. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire. Montrer que si f, g sont des sections (ou des rétractions) de $\mathcal{C}$, alors fg l'est aussi (s'il existe) mais que la réciproque est fausse.

22. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie linéaire. Montrer que toute section (ou rétraction) est un noyau (ou conoyau, respectivement).

23. Soit M un A-module. Montrer que tout épimorphisme $M_A \to A_A$ est une rétraction, mais qu'il existe des monomorphismes $A_A \to M_A$ qui ne sont pas des sections.

24. Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de A-modules et d'applications linéaires

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Montrer que, si f est une rétraction et g est une section, alors h est une section.

25. Formuler et résoudre le dual de l'exercice précédent.

26. Soit un diagramme à lignes exactes de $\operatorname{Mod} A$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{g} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec M libre. Trouver des morphismes $M \to M'$ et $L \to L'$ rendant le diagramme commutatif. Si f_1, f_2 sont deux tels morphismes $M \to M'$, montrer qu'il existe $h : M \to L'$ tel que $f_1 - f_2 = fh$.

27. Soit M un A-module. Montrer qu'il existe une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec les L_i des modules libres.

28. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module libre.

29. Si $\operatorname{card} X > 1$, montrer que le centre de $K\langle X\rangle$ est égal à K.

30. Montrer que dans $K\langle s,t\rangle$, les éléments st^n engendrent une sous-algèbre qui est libre sur ces générateurs.

31. Si les M_λ et les N_σ sont des bimodules, montrer que l'isomorphisme de (2.7) est un isomorphisme de modules sur les K-algèbres appropriées.

32. Soient M un A-module de présentation finie, et $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille arbitraire de A-modules. Montrer que l'on a un isomorphisme fonctoriel de K-modules $\operatorname{Hom}_A\left(M, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Hom}_A(M, N_\lambda)$.

33. Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de $\operatorname{Mod} A$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Démontrer l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow M \times L' \xrightarrow{\varphi} M \times M' \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0$$

où $\varphi(x,x') = (x, v(x) + f'(x'))$ et $\psi(y,y') = wg(y) - g'(y')$.

34. Soit G un groupe noté multiplicativement. On note G' le sous-groupe de G dont les éléments sont des produits finis de commutateurs $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ avec $x, y \in G$.

(a) Montrer que G' est un sous-groupe distingué de G et que G/G' est abélien. On note $p_G : G \to G/G'$ la surjection canonique.
(b) Montrer que pour tout homomorphisme $f : G \to A$ avec A un groupe abélien, il existe un unique homomorphisme $\overline{f} : G/G' \to A$ tel que $\overline{f}p_G = f$.
(c) Construire un foncteur $F : \mathrm{Gr} \to \mathrm{Ab}$ tel que $F(G) = G/G'$ pour tout groupe G.
(d) Montrer que F est adjoint à gauche du foncteur inclusion $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Gr}$.

35. Soient A une K-algèbre arbitraire, et I l'idéal bilatère de A engendré par les éléments de la forme $ab - ba$ (où $a, b \in A$).

(a) Montrer que A/I est une K-algèbre commutative.

On note $\pi : A \to A/I$ la surjection canonique.

(b) Montrer que, pour tout morphisme de K-algèbres $\varphi : A \to B$, avec B une K-algèbre commutative, il existe un unique morphisme de K-algèbres $\overline{\varphi} : A/I \to B$ tel que $\overline{\varphi}\pi = \varphi$.
(c) Construire un foncteur F de la catégorie $\mathrm{Alg}\,K$ dans la catégorie $\mathrm{Algc}\,K$ des K-algèbres commutatives, tel que $F(A) = A/I$.
(d) Montrer que F est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\mathrm{Algc}\,K \to \mathrm{Alg}\,K$.

36. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux catégories, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs tels que (F, G) est une paire adjointe. Démontrer l'existence de morphismes fonctoriels $FG \longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$ et $1_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$.

37. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de $\mathrm{Mod}\,A$, un morphisme $(f : L \to M) \to (f' : L' \to M')$ étant une paire d'applications linéaires (u, v) telle que $u : L \to L'$ et $v : M \to M'$ satisfont $vf = f'u$. Montrer que Ker et Coker définissent des foncteurs $\mathcal{C} \to \mathrm{Mod}\,A$.

38. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie K-linéaire et $f : M \to N$ un morphisme.

(a) Montrer que (L, ℓ) est un noyau de $f : M \to N$ si et seulement si la suite de K-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L', L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L', \ell)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L', M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L', f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L', N)$$

est exacte pour tout objet L' de $\mathcal{C}$.

(b) Montrer que (Q, q) est un conoyau de $f : M \to N$ si et seulement si la suite de K-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, Q') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(q, Q')} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, Q') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Q')} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, Q')$$

est exacte pour tout objet Q' de $\mathcal{C}$.

39. Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ une suite dans une catégorie abélienne. Montrer que $gf = 0$ si et seulement s'il existe un monomorphisme $h : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Ker} g$ tel que $kh = j$, où $j : \operatorname{Im} f \to Y$ et $k : \operatorname{Ker} g \to Y$ sont les morphismes canoniques.

40. Démontrer (5.6) (5.7) (5.8) (5.9).

41. Soit un diagramme de A-modules et d'applications A-linéaires

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "f'"] & P \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g'"] & U \arrow[d, "u"] \\ L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd} .$$

Montrer que, si (P, v, g') est un produit fibré de u, g, et (P', v', f') est un produit fibré de g', f, alors (P', vv', f') est un produit fibré de u, gf. Montrer ensuite que, si (P', vv', f) est un produit fibré de u, gf, et si v est un monomorphisme, alors (P', v', f) est un produit fibré de g' et f.

42. Formuler et résoudre le dual de l'exercice précédent.

43. Soit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & M_1 \arrow[d, "f_1"] \\ M_2 \arrow[r, "f_2"] & M \end{tikzcd}$$

un produit fibré de $\operatorname{Mod} A$ avec f_1, f_2 des monomorphismes. Montrer que l'on peut identifier P avec $M_1 \cap M_2$. En outre, dans ce cas, il existe une somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & M/M_1 \arrow[d] \\ M/M_2 \arrow[r] & M/(M_1 + M_2) \end{tikzcd}$$

44. Soit

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f_1"] & M \end{tikzcd}$$

un produit fibré de $\operatorname{Mod} A$. Si f_1 est le noyau d'un morphisme $f : M \to N$, montrer que p_2 est le noyau de $ff_2 : M_2 \to N$.

45. Formuler et résoudre le dual de l'exercice précédent.

46. Montrer que, si

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

est un produit fibré de $\operatorname{Mod} A$, alors f est un monomorphisme.

47. Formuler et résoudre le dual de l'exercice précédent.

48. Soient $f, g : M \to N$ deux morphismes d'une catégorie K-linéaire $\mathcal{C}$. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{h} & M \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (1,f)} \\ M & \xrightarrow{(1,g)} & M \times N \end{array}$$

est un produit fibré si et seulement si (L, h) est un noyau de $f - g$.

49. Formuler et résoudre le dual de l'exercice précédent.

50. On considère le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes de $\operatorname{Mod} A$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & P & \longrightarrow & V & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Montrer que v se factorise par M si et seulement si la ligne supérieure est scindée.

51. Formuler et résoudre le dual de l'exercice précédent.

52. On considère la catégorie $\mathcal{C}$ formée des quadruplets (E, F, u, v) où E, F sont deux espaces vectoriels sur un corps K et $u, v : E \to F$ deux applications linéaires. Un morphisme $(E, F, u, v) \to (E', F', u', v')$ est la donnée d'une paire (f, g) d'applications K-linéaires $f : E \to E'$, $g : F \to F'$ telles que $u'f = gu$, $v'f = gv$. La composition de $(f, g) : (E, F, u, v) \to (E', F', u', v')$ et $(f', g') : (E', F', u', v') \to (E'', F'', u'', v'')$ est donnée par $(f', g')(f, g) = (f'f, g'g)$. Montrer que $\mathcal{C}$ est abélienne.

53. Montrer que la catégorie $\mathcal{C}$ de l'exercice précédent est équivalente à la catégorie des A-modules, où

$$A = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{bmatrix}$$

avec l'addition matricielle et la multiplication définie par

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ (b, c) & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 \\ (b', c') & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ (ba', ca') + (db', dc') & dd' \end{bmatrix} .$$

54. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ des catégories, $F, F' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G, G' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ des foncteurs covariants avec $F \xrightarrow{\sim} F'$, $G \xrightarrow{\sim} G'$. Montrer que si F et G sont des équivalences quasi-inverses, il en est de même de F' et G'.

55. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ une équivalence de catégories K-linéaires. Montrer qu'un morphisme f de $\mathcal{C}$ est un monomorphisme (ou un épimorphisme) si et seulement si Ff l'est.

56. Soient A une K-algèbre et I nn idéal bilatère de A. On note $\mathcal{A}(I)$ la sous-catégorie pleine de Mod A formée des A-modnles M tels que $MI = 0$. Montrer que $\mathcal{A}(I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod}(A/I)$.

57. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des catégories, $F_1, F_2, F_3 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $G_1, G_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ des foncteurs. Montrer que:

(a) Si $\varphi : F_1 \to F_2$, $\psi : F_2 \to F_3$ sont des (iso)morphismes fonctoriels, il en est de même de $\psi\varphi : F_1 \to F_3$, et de $\varphi^{-1} : F_2 \to F_1$ (où φ^{-1} est défini par $\left(\varphi^{-1}\right)_X = \varphi_X^{-1}$).

(b) $F_1 \xrightarrow{\sim} F_2$, $G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ entraînent $G_1F_1 \xrightarrow{\sim} G_2F_2$.

58. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories K-linéaires, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs K-linéaires, avec F covariant et G contravariant.

(i) Si $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ dans $\mathcal{C}$ avec injections $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et projections $p_1, p_2, \ldots, p_n$, alors $F(M)$ est une somme directe de $F(M_1), F(M_2), \ldots, F(M_n)$ avec injections $F(q_1)$, $F(q_2)$, $\ldots$, $F(q_n)$ et projections $F(p_1)$, $F(p_2)$, $\ldots$, $F(p_n)$.

(ii) Avec la même hypothèse, $G(M)$ est une somme directe de $G(M_1)$, $G(M_2)$, $\ldots$, $G(M_n)$ avec injections $F(p_1)$, $F(p_2)$, $\ldots$, $F(p_n)$ et projections $F(q_1)$, $F(q_2)$, $\ldots$, $F(q_n)$.

(iii) Supposons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ abéliennes et soit $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ une suite exacte et scindée de $\mathcal{C}$. Montrer que les suites induites

$$0 \longrightarrow FL \longrightarrow FM \longrightarrow FN \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow GN \longrightarrow GM \longrightarrow GL \longrightarrow 0$$

sont exactes et scindées dans $\mathcal{D}$.

CHAPITRE IV

Les foncteurs Hom, modules projectifs et injectifs.

Il est naturel de se demander quels foncteurs préservent l'exactitude d'une suite. Un tel foncteur est dit exact. On pourrait s'attendre à ce qu'un foncteur qui "se comporte bien" soit exact. Malheureusement ce n'est pas le cas, et nous verrons de suite que les foncteurs les plus naturels, les foncteurs Hom, ne préservent qu'une partie de l'exactitude. Afin de corriger cette situation, nous sommes amenés à considérer les modules tels que le foncteur Hom covariant (ou contravariant) correspondant soit exact. De tels modules sont appelés projectifs (ou injectifs, respectivement). Ainsi que nous le verrons dans les chapitres suivants, l'étude des modules projectifs et injectifs est très utile pour la compréhension de la catégorie des modules.

1. Exactitude de foncteurs.

DÉFINITION. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories abéliennes. Un foncteur linéaire covariant (ou contravariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit *exact* si l'exactitude de la suite

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

de $\mathcal{C}$ implique l'exactitude de la suite induite de $\mathcal{D}$

$$FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ$$

(ou $FZ \xrightarrow{Fg} FY \xrightarrow{Ff} FX$, respectivement).

Par exemple, tout isomorphisme fonctoriel est exact. Un autre exemple de foncteur exact est le foncteur oubli $\operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} K$. Malheureusement, les foncteurs exacts sont relativement rares, et nous serons obligés de considérer des propriétés plus faibles.

DÉFINITION. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories abéliennes et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur linéaire.

(1) Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est covariant, F est dit *exact à gauche* si l'exactitude de la suite de $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

implique l'exactitude de la suite induite de $\mathcal{D}$

$$0 \longrightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ.$$

De même, F est dit *exact à droite* si l'exactitude de la suite de $\mathcal{C}$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

implique l'exactitude de la suite induite de $\mathcal{D}$

$$FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0.$$

(2) Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est coutravariaut, F est dit *exact à droite* si l'exactitude de la suite de $\mathcal{C}$

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

implique l'exactitude de la suite iuduite de $\mathcal{D}$

$$FZ \xrightarrow{Fg} FY \xrightarrow{Ff} FX \longrightarrow 0.$$

De même, F est dit *exact à gauche* si l'exactitude de la suite de $\mathcal{C}$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

implique l'exactitude de la suite induite de $\mathcal{D}$

$$0 \longrightarrow FZ \xrightarrow{Fg} FY \xrightarrow{Ff} FX.$$

On voit donc qu'un foncteur covariant F est exact à gauche si et seulement s'il préserve les noyaux, c'est-à-dire que, pour tout morphisme g de $\mathcal{C}$, ou a $F(\ker g) = \ker F(g)$; il est exact à droite si et seulement s'il préserve les conoyaux, c'est-à-dire que, pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$, on a $F(\operatorname{coker} f) = \operatorname{coker} Ff$. De même, un foncteur contravariant F est exact à gauche si et seulement s'il transforme conoyaux en noyaux, c'est-à-dire que, pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$, on a $F(\operatorname{coker} f) = \ker Ff$; il est exact à droite si et seulement s'il trausforme noyaux en conoyaux, c'est-à-dire que, pour tout morphisme g de $\mathcal{C}$, on a $F(\ker g) = \operatorname{coker} Fg$. Il est raisounable de peuser qu'un foucteur est exact si et seulement s'il est exact à la fois à gauche et à droite. C'est ce qu'affirme la proposition suivante, que nous ne formulerons et ne montrerons que dans le cas covariaut, le cas contravariant étaut laissé au lecteur. Un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sera dit *préserver les suites exactes courtes* si pour toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{C}$, la suite exacte courte induite

$$0 \longrightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \longrightarrow 0$$

de $\mathcal{D}$ est exacte.

PROPOSITION 1.1. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories abéliennes et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur covariant. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F est exact.*

(ii) *F préserve les suites exactes courtes.*
(iii) *F est exact à gauche et à droite.*

DÉMONSTRATION. Il est trivial que (i) implique (ii) et que (ii) implique (iii). Il reste à montrer que (iii) implique (i). Soit donc une suite exacte de $\mathcal{C}$,

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} Ff &= \operatorname{Ker}(\operatorname{coker} Ff) = \operatorname{Ker} F(\operatorname{coker} f) = F(\operatorname{Ker}(\operatorname{coker} f)) \\ &= F(\operatorname{Im} f) = F(\operatorname{Ker} g) = \operatorname{Ker} Fg. \quad \square\end{aligned}$$

L'exemple le plus important de foncteur exact à gauche est le foncteur Hom.

THÉORÈME 1.2. *Soient A une K-algèbre et*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

une suite de A-modules. Cette suite est exacte si et seulement si pour tout module X_A, la suite induite de K-modules

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(X,L) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(X,f)} \operatorname{Hom}_A(X,M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(X,g)} \operatorname{Hom}_A(X,N)$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. Nécessité. On prouve d'abord que $\operatorname{Hom}_A(X,f)$ est un monomorphisme: soit $u : X \to L$ tel que $\operatorname{Hom}_A(X,f)(u) = fu = 0$; comme f est un monomorphisme, on a bien $u = 0$. D'autre part, $gf = 0$ implique $\operatorname{Hom}_A(X,g)\operatorname{Hom}_A(X,f) = \operatorname{Hom}_A(X,gf) = 0$, donc

$$\operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(X,f) \subseteq \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_A(X,g).$$

Enfin, si $v : X \to M$ est telle que $0 = \operatorname{Hom}_A(X,g)(v) = gv$, la propriété universelle de $L = \operatorname{Ker} g$ doune un morphisme $u : X \to L$ tel que $v = fu = \operatorname{Hom}_A(X,f)(u)$.

Suffisance. Pour montrer que f est un monomorphisme, on prend $X = \operatorname{Ker} f$ et $j = \ker f : X \to L$ l'injection canonique. Alors $0 = fj = \operatorname{Hom}_A(X,f)(j)$ et l'injectivité de $\operatorname{Hom}_A(X,f)$ donnent $j = 0$ et donc $X = 0$.

On a $gf = 0$: en effet, prenons $X = L$ et $1_L \in \operatorname{Hom}_A(L,L)$. Alors $gf = \operatorname{Hom}_A(X,g)\operatorname{Hom}_A(X,f)(1_L) = 0$. Enfin, pour montrer que $f = \ker g$ (ce qui achèvera la démonstration), soit $v : X \to M$ tel que $gv = 0$. Alors $v \in \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_A(X,g) = \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(X,f)$ et il existe $u : X \to L$ tel que $v = fu$. Comme f est un monomorphisme, u est unique. On a bien $f = \ker g$. $\square$

La suffisance se montre aussi en posant $X_A = A_A$ et en utilisant l'isomorphisme fonctoriel $\varphi : \operatorname{Hom}_A(A,-) \xrightarrow{\sim} 1_{\operatorname{Mod} A}$ de (II.5.3): en effet, on a un diagramme commutatif à ligne supérieure exacte, et où les flèches verticales sont des isomorphismes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A,L) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(A,f)"] \arrow[d, "\varphi_L", "\wr"'] & \mathrm{Hom}_A(A,M) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(A,g)"] \arrow[d, "\varphi_M", "\wr"'] & \mathrm{Hom}_A(A,N) \arrow[d, "\varphi_N", "\wr"'] \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, la ligne inférieure est exacte.

Cette seconde démonstration, simple et conceptuelle, présente néanmoins un inconvénient: la démonstration correspondante de l'énoncé dual utilise la notion de cogénérateur injectif, et ne pourra être faite avant la fin de la section 3.

Il suit immédiatement du théorème que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ est exact à gauche, pour tout A-module X. Ce foncteur n'est généralement pas exact à droite, et donc pas exact: prenons $A = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{Z}_2$, $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}_2$ et $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ l'épimorphisme canonique; on a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}) = 0$ tandis que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2) \neq 0$, de sorte que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, f) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$ ne peut être un épimorphisme. On a toutefois.

COROLLAIRE 1.3. *Soit A une K-algèbre. Une suite de A-modules*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée si et seulement si, pour tout A-module X, la suite induite de K-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(X,f)} \mathrm{Hom}_A(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(X,g)} \mathrm{Hom}_A(X,N) \longrightarrow 0$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. Suffisance. Par le théorème (1.2), on a que la suite $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ est exacte. Prenant $X = N$, il existe $v : N \to M$ tel que $1_N = \mathrm{Hom}_A(N,g)(v) = gv$. Donc g est un épimorphisme et même une rétraction.

Nécessité. Il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_A(X,g)$ est un épimorphisme. Comme g est une rétraction, il existe $v : N \to M$ telle que $gv = 1_N$. Pour tout $u : X \to N$, on a $vu : X \to M$ et $\mathrm{Hom}_A(X,g)(vu) = gvu = u$. □

Notons qu'avec les hypothèses du corollaire, la suite induite est également scindée, puisque $gv = 1_N$ implique $\mathrm{Hom}_A(X,g)\,\mathrm{Hom}_A(X,v) = 1_{\mathrm{Hom}_A(X,N)}$.

On a les duals des résultats précédents.

THÉORÈME 1.4. *Soient A une K-algèbre et*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

une suite de A-modules. Cette suite est exacte si et seulement si, pour tout module X_A, la suite induite de K-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(g,X)} \mathrm{Hom}_A(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,X)} \mathrm{Hom}_A(L,X)$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. Nécessité. On prouve d'abord que $\mathrm{Hom}_A(g, X)$ est un monomorphisme: soit $u : N \to X$ tel que $ug = 0$; comme g est un épimorphisme, on a bien $u = 0$. D'autre part, $gf = 0$ implique $\mathrm{Hom}_A(f, X)\,\mathrm{Hom}_A(g, X) = \mathrm{Hom}_A(gf, X) = 0$ donc $\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(g, X) \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(f, X)$. Enfin, si $v : M \to X$ est telle que $0 = \mathrm{Hom}_A(f, X)(v) = vf$, la propriété universelle de $N = \mathrm{Coker}\, f$ donne un morphisme $u : N \to X$ tel que $v = ug = \mathrm{Hom}_A(g, X)(u)$.

Suffisance. Pour montrer que g est un épimorphisme, on prend $X = \mathrm{Coker}\, g$, et $p = \mathrm{coker}\, g : N \to X$ la projection canonique. Alors $0 = pg = \mathrm{Hom}_A(g, X)(p)$ et l'injectivité de $\mathrm{Hom}_A(g, X)$ donnent que $p = 0$ et donc $X = 0$.

On a $gf = 0$: en effet, soient $X = N$ et $1_N \in \mathrm{Hom}_A(N, N)$. Alors $gf = \mathrm{Hom}_A(f, X)\,\mathrm{Hom}_A(g, X)\,(1_N) = 0$. Enfin, pour montrer que $g = \mathrm{coker}\, f$ (ce qui achèvera la démonstration), soit $v : M \to X$ tel que $vf = 0$. Alors $v \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(f, X) = \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(g, X)$ et il existe $u : N \to X$ tel que $v = ug$. Comme g est un épimorphisme, u est unique. On a bien $g = \mathrm{coker}\, f$. □

On notera que cette démonstration est exactement duale de celle du théorème (1.2). On voit donc que le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_A(-, X)$ est exact à gauche. Il n'est généralement pas exact à droite (et donc pas exact): soient $A = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{Z}$, $L = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$ et $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ l'inclusion. On sait que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$ (en effet, si $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ est un morphisme non nul, $ag\left(\frac{1}{a}\right) = g(1)$ pour tout $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ donne que tout $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ divise $g(1) \in \mathbb{Z}$, une absurdité), tandis que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \neq 0$, de sorte que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(f, \mathbb{Z}) : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ne peut être un épimorphisme.

COROLLAIRE 1.5. *Soit A une K-algèbre. Une suite de A-modules*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée si et seulement si, pour tout module X_A, la suite induite de K-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(g,X)} \mathrm{Hom}_A(M, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,X)} \mathrm{Hom}_A(L, X) \longrightarrow 0$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. Duale de celle du corollaire (1.3) et laissée au lecteur. □

Encore une fois, cette suite induite est alors scindée.

Il existe une relation fondamentale entre foncteurs exacts à gauche et foncteurs exacts à droite.

THÉORÈME 1.6. *Soient A, B deux K-algèbres et $F : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, B$, $G : \mathrm{Mod}\, B \to \mathrm{Mod}\, A$ deux foncteurs covariants tels que (F, G) est une paire adjointe. Alors F est exact à droite et G est exact à gauche.*

DÉMONSTRATION. L'énoncé dit que, pour toute paire de modules M_A et X_B, on a un isomorphisme fonctoriel $\varphi_{M,X} : \mathrm{Hom}_B(FM, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, GX)$. Soit donc une suite exacte de A-modules

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

Il suit de la fonctorialité de l'isomorphisme précédent que le diagramme suivant est commutatif pour tout B-module X_B:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(FN,X) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_B(Fg,X)} & \mathrm{Hom}_B(FM,X) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_B(Ff,X)} & \mathrm{Hom}_B(FL,X) \\
& {\scriptstyle \varphi_{N,X}}\downarrow\wr & & {\scriptstyle \varphi_{M,X}}\downarrow\wr & & {\scriptstyle \varphi_{L,X}}\downarrow\wr \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(N,GX) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(g,GX)} & \mathrm{Hom}_A(M,GX) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,GX)} & \mathrm{Hom}_A(L,GX)
\end{array}$$

Comme $\mathrm{Hom}_A(-,GX)$ est exact à gauche, la ligne inférieure est exacte. Comme les flèches verticales sont des isomorphismes, la commutativité donne l'exactitude de la ligne supérieure. Comme X_B est arbitraire, la suffisance dans le théorème (1.4) donne l'exactitude de la suite

$$FL \xrightarrow{Ff} FM \xrightarrow{Fg} FN \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire l'exactitude à droite de F. On montre de même l'exactitude à gauche de G. □

2. Modules projectifs.

Soit A une K-algèbre. Il est naturel d'essayer de caractériser les cas où le foncteur Hom est exact, c'est-à-dire les modules X_A tels que $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ (ou $\mathrm{Hom}_A(-,X)$) est un foncteur exact.

Définition. Un A-module P_A est dit *projectif* si le foncteur $\mathrm{Hom}_A(P,-)$ est exact.

Explicitons cette définition. Comme on sait que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(P,-)$ est de toutes façons exact à gauche (préserve les noyaux, c'est-à-dire les monomorphismes), il est exact si et seulement s'il est exact à droite (préserve les conoyaux, c'est-à-dire les épimorphismes) donc si et seulement si, pour toute suite exacte

$$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

de A-modules, la suite induite

$$\mathrm{Hom}_A(P,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(P,f)} \mathrm{Hom}_A(P,N) \longrightarrow 0$$

de K-modules est exacte. On a prouvé:

Lemme 2.1. *Un A-module P est projectif si et seulement si, pour tout épimorphisme $f : M \to N$ et tout morphisme $u : P \to N$, il existe un morphisme $v : P \to M$ tel que $u = fv$*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[d, "u"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad . \quad \square$$

Il est essentiel de remarquer que le morphisme v (dont on dit parfois qu'il *relève* u, ou est un *relèvement* de u) n'est généralement pas unique, comme le montre bien la démonstration du lemme suivant.

LEMME 2.2. *Tout A-module libre est projectif.*

DÉMONSTRATION. Soit en effet $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base du A-module libre P. On se donne un épimorphisme $f : M \to N$ et un morphisme $u : P \to N$. Comme f est surjective il existe, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, un élément $x_\lambda \in M$ tel que $f(x_\lambda) = u(e_\lambda)$. On définit le relèvement $v : P \to M$ par $v(e_\lambda) = x_\lambda$ pour chaque $\lambda \in \Lambda$, et en prolongeant par linéarité, c'est-à-dire en appliquant la propriété universelle d'un module libre. $\square$

Par exemple, $P_A = A_A$ est un A-module projectif. Comme tout module libre est somme directe de copies de A_A, cela nous amène à la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3. *Soit $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules. La somme directe $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ est projective si et seulement si chaque P_λ est projectif.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. Supposons que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ est projectif et montrons que chaque P_λ (où $\lambda \in \Lambda$) est projectif. Notons $q_\lambda : P_\lambda \to \bigoplus_{\mu\in\Lambda} P_\mu$ et $p_\lambda : \bigoplus_{\mu\in\Lambda} P_\mu \to P_\lambda$ l'injection et la projection canoniques respectivement. Soient $f : M \to N$ un épimorphisme et $u : P_\lambda \to N$ un morphisme.

$$\begin{tikzcd}
& \bigoplus_{\mu\in\Lambda} P_\mu \arrow[ddl, "w"'] \arrow[d, shift right, "p_\lambda"'] & \\
& P_\lambda \arrow[u, shift right, "q_\lambda"'] \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[d, "u"] & \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Il existe un morphisme $w : \bigoplus_{\mu\in\Lambda} P_\mu \to M$ tel que $fw = up_\lambda$. Mais alors $fwq_\lambda = up_\lambda q_\lambda = u1_{P_\lambda} = u$. Si on pose $v = wq_\lambda$, on a bien $v : P_\lambda \to M$ tel que $fv = u$.

Suffisance. Posons $P = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$. Supposons que chaque P_λ est projectif. Soient $f : M \to N$ un épimorphisme et $u : P \to N$ un morphisme. Notons encore $q_\lambda : P_\lambda \to P$ l'injection canonique. Pour tout λ, il existe $v_\lambda : P_\lambda \to M$ tel que $fv_\lambda = uq_\lambda$.

$$\begin{tikzcd} & P_\lambda \arrow[d, "q_\lambda"] \arrow[ddl, "v_\lambda"'] & \\ & \bigoplus_{\mu\in\Lambda} P_\mu \arrow[d, "u"] \arrow[dl, dashed, "v"'] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle de $\bigoplus_{\mu\in\Lambda} P_\mu$, il existe un unique $v : \bigoplus_{\mu\in\Lambda} P_\mu \to M$ tel que $vq_\lambda = v_\lambda$. Donc $fvq_\lambda = uq_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Par conséquent, $fv = u$. □

Le théorème suivant caractérise complètement les modules projectifs.

THÉORÈME 2.4. *Soit P_A un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *P est projectif.*
(ii) *P est facteur direct d'un A-module libre.*
(iii) *Toute suite exacte courte de la forme*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

est scindée.

DÉMONSTRATION. (i) implique (iii), puisque la définition d'un module projectif implique l'existence d'un morphisme $v : P \to N$

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d, "1_P"] \arrow[dl, dashed, "v"'] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

tel que $gv = 1_P$, de sorte que g est une rétraction.

(iii) implique (ii): en effet, tout module, en particulier P, est quotient d'un A-module libre: il existe donc une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow L \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$$

avec L libre. Par hypothèse, elle est scindée.

(ii) implique (i): cela suit en effet de (2.2) et (2.3). □

La condition (iii) du théorème peut être reformulée comme suit: tout épimorphisme de but projectif est une rétraction.

Par exemple, si A est un corps (peut-être gauche), tout A-module est libre (III.3.5) donc est projectif. Nous verrons plus loin (en (VI.7.1)) une caractérisation des algèbres ayant la propriété que tout module est projectif.

Il est naturel, au vu de (2.2) et de la condition (ii) du théorème, de se demander s'il existe des modules projectifs qui ne sont pas libres.

Soient $A = T_2(K) = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$ l'algèbre des 2×2 matrices triangulaires inférieures, et $\mathbf{e}_{11} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{e}_{22} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ les idempotents matriciels. On a $A = \mathbf{e}_{11}A \oplus \mathbf{e}_{22}A$, donc $e_{11}A$ et $e_{22}A$ sont des A-modules projectifs. Par contre, ils ne sont pas libres: en effet, la dimension d'un A-module libre qui est de K-dimension finie doit être un multiple de $\dim_K A = 3$, et on a $\dim_K(e_{11}A) = 1$ et $\dim_K(e_{22}A) = 2$.

Il est intéressant de remarquer que si $A = \mathbb{Z}$, les A-modules projectifs (donc les groupes abéliens projectifs) coïncident avec les A-modules libres. Nous montrerons en fait plus loin (en (XII.1.5)) que si A est un domaine d'intégrité principal, tout sous-module d'un A-module libre est lui-même libre. Par conséquent, tout A-module projectif est libre.

PROPOSITION 2.5. *Pour tout A-module M, il existe une suite exacte*

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$$

avec les P_i des A-modules projectifs.

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur n. Pour $n = 0$, l'existence de l'épimorphisme $f_0 : P_0 \to M$ suit de ce que, par (III.3.6), tout A-module est quotient d'un A-module libre, et tout module libre est projectif. Pour $n > 0$, on applique le même raisonnement à $\operatorname{Ker} f_{n-1}$. $\square$

Une suite comme celle de la proposition s'appelle une *résolution projective* du A-module M. Une résolution projective à deux termes

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

s'appelle une *présentation projective* de M.

Résolutions et présentations projectives d'un module peuvent être comprises comme des approximations de ce module par des modules projectifs et sont utiles dès qu'un calcul s'opère plus facilement sur un module projectif que sur un module arbitraire, et est compatible avec le passage au conoyau.

3. Modules injectifs.

La notion duale de celle de module projectif est celle de module injectif.

DÉFINITION. Un A-module I_A est dit *injectif* si le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-, I)$ est exact.

Cette définition équivaut à dire que le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-, I)$ (qui est contravariant) est exact à droite, c'est-à-dire transforme les noyaux en conoyaux, ou encore les monomorphismes en épimorphismes, ce qui est le cas si et seulement si, pour toute suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M$$

la suite induite de K-modules

$$\operatorname{Hom}_A(M, I) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(f,I)} \operatorname{Hom}_A(L, I) \longrightarrow 0$$

est exacte. On exprime ceci par le lemme suivant.

LEMME 3.1. *Un A-module I_A est injectif si et seulement si, pour tout monomorphisme $f : L \to M$ et tout morphisme $u : L \to I$, il existe un morphisme $v : M \to I$ tel que $u = vf$*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "v"] \\ & I & \end{tikzcd} \quad . \ \square$$

Encore une fois, le morphisme v (dont on dit parfois qu'il *prolonge* u, ou est un *prolongement* de u) n'est généralement pas unique. Bien que la notion d'injectif soit duale de celle de projectif, il est difficile de donner tout de suite des exemples de modnles injectifs. Nous le ferons plus loin. En attendant, nous montrons l'énoncé dual de (2.3). Bien que la démonstration soit également duale, nous la ferons en détail.

PROPOSITION 3.2. *Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de A-modules. Le produit $\prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ est injectif si et seulement si chaque I_λ est injectif.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. Supposons $\prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ injectif. Notons $p_\lambda : \prod_{\mu \in \Lambda} I_\mu \to I_\lambda$ et $q_\lambda : I_\lambda \to \prod_{\mu \in \Lambda} I_\mu$ respectivement la projection et l'injection canoniques. Soient $f : L \to M$ un monomorphisme et $u : L \to I_\lambda$ un morphisme. Il existe alors un morphisme $w : M \to \prod_{\mu \in \Lambda} I_\mu$ tel que $wf = q_\lambda u$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "v"] \arrow[ddl, "w"] \\ & I_\lambda \arrow[d, shift right, "q_\lambda"'] & \\ & \prod_{\mu \in \Lambda} I_\mu \arrow[u, shift right, "p_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Mais alors $v = p_\lambda w$ satisfait $vf = p_\lambda wf = p_\lambda q_\lambda u = u$.

Suffisance. Supposons chaque I_λ injectif et notons encore $p_\lambda : \prod_{\mu \in \Lambda} I_\mu \to I_\lambda$ la projection canonique. Il existe pour chaque $\lambda \in \Lambda$ un morphisme $v_\lambda : M \to I_\lambda$ tel que $v_\lambda f = p_\lambda u$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[dl, dashed, "v"] \arrow[ddl, "v_\lambda"] \\ & \prod\limits_{\mu\in\Lambda} I_\mu \arrow[d, "p_\lambda"'] & \\ & I_\lambda & \end{tikzcd} .$$

Par la propriété universelle, il existe un unique $v : M \to \prod\limits_{\mu\in\Lambda} I_\mu$ tel que $p_\lambda v = v_\lambda$ ponr tout λ. Mais alors $p_\lambda v f = v_\lambda f = p_\lambda u$ ponr tout λ. Par l'unicité, on a bien $vf = u$. □

Il n'existe pas pour les modules injectifs de théorème de structnre dual au théorème (2.4). Néanmoins, on peut montrer qu'nn module I est injectif si et seulement si tout morphisme de source I est nne section.

THÉORÈME 3.3. *Un A-module I_A est injectif si et seulement si toute suite exacte courte de la forme*

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

est scindée.

DÉMONSTRATION. Nécessité. L'injectivité de I implique l'existence d'un morphisme $v : M \to I$ qui prolonge $1_I : I \to I$, c'est-à-dire tel que $vf = 1_I$. Ainsi, f est une section.

Suffisance. Soient $f : L \to M$ un monomorphisme, et $u : L \to I$ un morphisme arbitraire. Posons $N = \operatorname{Coker} f$. Construisons la somme amalgamée Q de f et u. D'après (III.5.9), on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "v"] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r, shift left, "h"] & Q \arrow[l, shift left, dashed, "h'"] \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, la suite du bas est scindée, donc il existe $h' : Q \to I$ tel que $h'h = 1_I$. Mais alors $h'v : M \to I$ satisfait $(h'v)f = h'(vf) = h'hu = u$, ce qui montre bien que I est injectif. □

THÉORÈME 3.4 (CRITÈRE DE BAER). *Un A-module I_A est injectif si et seulement si, pour tout idéal à droite J_A de A et tout morphisme $v : J_A \to I_A$, il existe un morphisme $w : A_A \to I_A$ dont la restriction à J égale v.*

DÉMONSTRATION. La nécessité étant évidente, il reste à montrer la suffisance. Soient I satisfaisant la condition donnée, $f : L \to M$ un monomorphisme et $u : L \to I$ un morphisme arbitraire. Comme f est un monomorphisme, on peut identifier L à un sous-module de M. On considère donc l'ensemble $\mathcal{E}$ des paires (L', u') où $L \subseteq L' \subseteq M$ et $u' : L' \to I$ prolonge u. Alors $\mathcal{E} \neq \emptyset$ puisque $(L, u) \in \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, "u"'] \arrow[dr, dashed] & & M \\
& & L' \arrow[ur, dashed] \arrow[dl, dashed, "u'"] & \\
& I & &
\end{tikzcd}$$

On ordonne $\mathcal{E}$ par $(L', u') \leq (L'', u'')$ si et seulement si $L' \subseteq L''$ et u'' prolonge u'. Il est clair que l'on a là un ordre partiel et le lecteur vérifiera aisément que $\mathcal{E}$ est inductif pour cet ordre. Le lemme de Zorn permet de conclure à l'existence d'une paire maximale (L_0, u_0) dans $\mathcal{E}$. Si $L_0 = M$, on a fini. On va donc supposer que $L_0 \subsetneqq M$ et arriver à une contradiction.

Soit $x \in M \setminus L_0$. On pose $J = \{a \in A \mid xa \in L_0\}$: alors J est évidemment un idéal à droite de A. On définit $v : J \to I$ par $v(a) = u_0(xa)$ pour $a \in J$. Il snit de l'hypothèse qu'il existe une application A-linéaire $w : A \to I$ qui prolonge v.

Considérons maintenant le sous-module $L_1 = L_0 + xA$ de M (qui contient proprement L_0). On définit un morphisme $u_1 : L_1 \to I$ par $u_1(x_0 + xa) = u_0(x_0) + w(1)a$ pour $x_0 \in L_0$ et $a \in A$. Il faut montrer que cette définition n'est pas ambigüe. Mais si $x_0 + xa = x_0' + xa'$ (avec $x_0, x_0' \in L_0$ et $a, a' \in A$), on a $x_0 - x_0' = x(a' - a) \in L_0$ et donc $a' - a \in J$. Par conséquent, $u_0(x(a' - a))$ et $v(a' - a)$ sont définis et on a $u_0(x_0 - x_0') = u_0(x(a' - a)) = v(a' - a) = w(a' - a)$. Donc $u_0(x_0) + w(1)a = u_0(x_0') + w(1)a'$. On a prouvé que $u_1 : L_1 \to I$ est un morphisme. Comme il prolonge u_0, la paire (L_1, u_1) est dans $\mathcal{E}$ et est strictement plus grande que la paire maximale (L_0, u_0), une contradiction. Donc $L_0 = M$ et I est injectif. □

On a vu que tout module est quotient d'un A-module projectif (ce qui suit de (2.5), ou plus directement de (2.1) et (III.3.6)). L'énoncé dual, à savoir que tout module est sous-module d'un module injectif, est également vrai, mais plus difficile à prouver. Afin de ce faire, nous commençons par donner des exemples de A-modules injectifs. On remarque d'abord que la définition d'un groupe abélien divisible se laisse généraliser de façon évidente.

DÉFINITION. Un A-module M est dit *divisible* si, pour tout $x \in M$ et tout $a \in A$ non nul qui n'est pas un diviseur de zéro, il existe un $y \in M$ tel que $x = ya$.

Rappelons qne $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont deux exemples de $\mathbb{Z}$-modules divisibles.

Notre objectif est d'abord de caractériser les groupes abéliens injectifs. Nous donnons en fait une caractérisation valide pour tout *domaine d'intégrité principal* (c'est-à-dire une algèbre commutative, intègre et dont tous les idéaux sont principaux: c'est par exemple le cas pour la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{Z}$, et la K-algèbre $K[t]$ des polynômes en t à coefficients dans un corps K).

THÉORÈME 3.5. *Tout A-module injectif est divisible. Réciproquement, si A est un domaine d'intégrité principal, tout module divisible est injectif.*

DÉMONSTRATION. Soit I un A-module injectif. Prenons $x \in I$ et $a \in A$ non diviseur de zéro. On considère le sous-module aA de A_A et on définit $u : aA \to I$ par $u(ab) = xb$ (où $b \in A$). On note que u est définie sans ambiguïté car a n'est pas un diviseur de zéro. Comme I est injectif, il existe $v : A \to I$ qui prolouge u et donc $x = u(a) = v(a) = v(1)a$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & aA \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[dl, dashed, "v"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Réciproquement, soient A un domaine d'intégrité principal et D_A un A-module divisible. Afin d'appliquer le critère de Baer (3.4), on considère un idéal à droite non nul J_A de A et un morphisme $u : J \to D$. Comme A est principal, il existe $a \in A$ non nul tel que $J = aA$. Comme a n'est pas un diviseur de zéro, il existe $d \in D$ tel que $u(a) = da$. On définit $v : A \to D$ par $v(b) = db$ (où $b \in A$). Alors v prolonge bien u, puisque $v(ac) = dac = u(a)c = u(ac)$ pour tout $c \in A$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & A \arrow[dl, dashed, "v"] \\ & D & \end{tikzcd} . \qquad \square$$

Le théorème entraîne immédiatement qu'un groupe abélien est divisible si et seulement s'il est injectif. Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules injectifs.

DÉFINITION. Un A-module injectif Q est appelé uu *cogénérateur injectif* si $\mathrm{Hom}_A(M, Q) \neq 0$ pour tout A-module non nul M_A.

LEMME 3.6. *$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un cogénérateur injectif de* $\mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION. Soit M un groupe abélien non nul. On prend $x \in M$ non nul. Si x est d'ordre infini, on définit $u : x\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par $u(x) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Si x est d'ordre fini n, on définit $u : x\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par $u(x) = \frac{1}{n} + \mathbb{Z}$. Par l'injectivité de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, le morphisme non nul $u : x\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ se prolonge eu un morphisme $v : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ lequel est évidemment aussi non nul. $\square$

PROPOSITION 3.7. *Soit Q_A un cogénérateur injectif de* $\mathrm{Mod}\,A$. *Pour tout A-module M, il existe un monomorphisme $M \to Q^\Lambda$ pour un ensemble Λ.*

DÉMONSTRATION. Posons $\Lambda = \mathrm{Hom}_A(M, Q)$ et définissons $f : M \to Q^\Lambda$ par $f(x) = (u(x))_{u \in \Lambda}$. C'est évidemment uue application A-linéaire. Si $x \in M$ est non nul, il existe un morphisme non nul $u' : xA \to Q$ (car Q est un cogénérateur injectif), douc il existe un morphisme non nul $u : M \to Q$ qui prolonge u'. En particulier $u(x) \neq 0$ et donc $f(x) \neq 0$. L'application f est bien un monomorphisme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & xA \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & M \arrow[dl, dashed, "u"] \\ & Q & \end{tikzcd} . \qquad \square$$

Comme Q^Λ est injectif, étant produit de modules injectifs (3.2), il suit de la proposition que l'existence d'un cogénérateur injectif dans $\operatorname{Mod} A$ entraîne que tout A-module est sous-module d'un A-module injectif.

En particulier, on vient de voir que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est uu cogénérateur injectif de $\operatorname{Mod}\mathbb{Z}$. Donc tout groupe abélien est un sous-groupe d'un groupe abélien injectif (= divisible).

Nous allons maintenant établir l'existence d'un cogénérateur injectif dans une catégorie de modules arbitraire. Soit donc A une K-algèbre. On considère A comme un $(A-\mathbb{Z})$-bimodule et le foncteur de changement des scalaires

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_A A_{\mathbb{Z}}, -) : \operatorname{Mod}\mathbb{Z} \to \operatorname{Mod} A$$

(en effet, il suit de (II.5.2) que ce foncteur donne à tout groupe abélien une structure de A-module).

LEMME 3.8. *Pour une K-algèbre A, le foncteur de changement des scalaires* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_A A_{\mathbb{Z}}, -) : \operatorname{Mod}\mathbb{Z} \to \operatorname{Mod} A$ *est un adjoint à droite du foncteur oubli* $U : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod}\mathbb{Z}$.

DÉMONSTRATION. Pour un A-module M_A et un groupe abélien G, il faut montrer qu'il existe un isomorphisme

$$\varphi : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(UM, G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_A A_{\mathbb{Z}}, G))$$

fonctoriel en M et en G. On définit φ par

$$f \longmapsto (x \mapsto (a \mapsto f(xa)))$$

(pour $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(UM, G)$, $x \in M$, $a \in A$) et un morphisme

$$\psi : \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_A A_{\mathbb{Z}}, G)) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(UM, G)$$

par

$$u \longmapsto (x \mapsto u(x)(1))$$

(pour $u \in \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_A A_{\mathbb{Z}}, G))$, $x \in M$). Alors φ et ψ sont bien des isomorphismes inverses l'un de l'autre, puisque

$$(\varphi \circ \psi)(u) = \varphi(\psi(u))$$

et

$$\varphi(\psi(u))(x)(a) = \psi(u)(xa) = u(xa)(1) = u(x)(a)$$

(pour u, x, a comme plus haut). On a donc bien $(\varphi \circ \psi)(u) = u$ pour tout u. Par conséquent, $\varphi \circ \psi = 1$. De même, $\psi \circ \varphi = 1$. Enfin, la fonctorialité est un exercice facile laissé au lecteur. □

PROPOSITION 3.9. *Soit A une K-algèbre. Le A-module* $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_A A_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *est un cogénérateur injectif pour* $\operatorname{Mod} A$.

DÉMONSTRATION. On sait que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module injectif. Par conséquent, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est exact. L'isomorphisme fonctoriel de (3.8) donne alors l'exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}_A(-,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA_{\mathbb{Z}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Donc $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA_{\mathbb{Z}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un A-module injectif. D'autre part, pour un A-module M, le même isomorphisme de foncteurs donne un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_AA_{\mathbb{Z}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où, à droite, M est vu comme un groupe abélien. Comme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un cogénérateur injectif pour $\mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$, d'où l'énoncé. $\square$

Il suit immédiatement de la proposition et des remarques suivant (3.7) que tout A-module est sous-module d'un A-module injectif. En fait, nous formulons cet énoncé sous la forme plus forte suivante.

PROPOSITION 3.10. *Pour tout A-module M, il existe une suite exacte de la forme*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n \xrightarrow{f_{n+1}} I_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

où les I_i sont des A-modules injectifs.

DÉMONSTRATION. Duale de celle de (2.5) et laissée au lecteur. $\square$

Une suite exacte comme celle de la proposition s'appelle *résolution injective* du A-module M. Une résolution injective à deux termes

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$$

s'appelle une *présentation injective* de M. Résolutions et présentations injectives d'un module peuvent être comprises comme des approximations de ce module par des modules injectifs.

Nous achevons cette section sur une propriété intéressante des cogénérateurs injectifs, que nous utiliserons au chapitre VI.

LEMME 3.11. *Soit Q un cogénérateur injectif de* $\mathrm{Mod}\,A$. *Une suite de A-modules*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

est exacte si et seulement si la suite induite de K-modules

$$\mathrm{Hom}_A(N,Q) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(g,Q)} \mathrm{Hom}_A(M,Q) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,Q)} \mathrm{Hom}_A(L,Q)$$

est exacte.

DÉMONSTRATION. Comme la nécessité suit évidemment de l'injectivité de Q, montrons la suffisance. Pour prouver que $gf = 0$, soit $x \in L$ tel que $gf(x) \neq 0$. Comme Q est un cogénératenr injectif, il existe $u : N \to Q$ tel que $u(gf(x)) \neq 0$. Mais alors $ugf \neq 0$ donne la contradiction $\mathrm{Hom}_A(f,Q)\,\mathrm{Hom}_A(g,Q) \neq 0$. On a prouvé que $gf = 0$.

Supposons maintenant $x \in \mathrm{Ker}\,g$ et $x \notin \mathrm{Im}\,f$. Soit $p : M \to \mathrm{Coker}\,f$ la projection canonique. Il suit de l'hypothèse que $p(x) = x + \mathrm{Im}\,f \neq 0$. Comme Q est un cogénérateur injectif, il existe $u : \mathrm{Coker}\,f \to Q$ tel que $up(x) \neq 0$. Comme

$pf = 0$, on a $upf = 0$ et donc $up \in \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_A(f,Q) = \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(g,Q)$. Par conséquent, il existe $v : N \to Q$ tel que $up = \operatorname{Hom}_A(g,Q)(v) = vg$:

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ & & \operatorname{Coker} f & \xrightarrow{u} & Q \end{array} .$$

Mais alors on obtient la contradiction

$$0 \neq up(x) = vg(x) = v(0) = 0.$$

Cela montre que $\operatorname{Im} f \supseteq \operatorname{Ker} g$ et donc l'énoncé. $\square$

Comme application immédiate de ce lemme, nous tenons une promesse faite à la section 1 en présentant une démonstration simple de la suffisance en (1.4): en effet, l'hypothèse de (1.4) implique que, si Q est un cogénérateur injectif de $\operatorname{Mod} A$, alors la suite

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(N,Q) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(g,Q)} \operatorname{Hom}_A(M,Q) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(f,Q)} \operatorname{Hom}_A(L,Q)$$

est exacte, et le lemme précédent entraîne, comme voulu, l'exactitude de la suite

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

4. Extensions essentielles et enveloppes injectives.

Nous allons maintenant prouver que l'on peut trouver un "plus petit" module injectif E contenant un module donné M. Afin de justifier notre première définition, remarquons que si E' est un sous-module injectif non nul de E, il en est un facteur direct par (3.3), par conséquent $E' \cap M = 0$ entraînerait que M se plonge dans E/E', ce qui contredirait la minimalité de E: on a donc besoin d'un module injectif E tel que M coupe tout sous-module (injectif) non nul de E. On en vient ainsi à la définition suivante.

DÉFINITION. Soit M un A-module. Une *extension essentielle* E de M est un module E contenant M et tel que si N est un sous-module non nul de E, alors $N \cap M \neq 0$. On dit aussi que M est un *sous-module essentiel* de E.

Par exemple, il est facile de voir que $\mathbb{Q}$ est une extension essentielle de $\mathbb{Z}$.

Il est utile d'exprimer la notion d'extension essentielle en termes de morphismes.

DÉFINITION. Soient M, E deux A-modules. Un *monomorphisme* $f : M \to E$ est dit *essentiel* si, pour tout morphisme $h : E \to F$ tel que hf est un monomorphisme, on a que h est lui-même un monomorphisme.

Les deux propriétés suivantes sont immédiates.

LEMME 4.1. *Soient $f : L \to M$ et $g : M \to N$ deux monomorphismes de A-modules.*

(i) *Si g et f sont essentiels, alors $gf : L \to N$ est aussi un monomorphisme essentiel.*
(ii) *Si $gf : L \to N$ est un monomorphisme essentiel, alors g est essentiel.*

DÉMONSTRATION. (i) En effet, gf est évidemment un monomorphisme, et hgf monomorphisme implique successivement hg monomorphisme (car f est essentiel) et h monomorphisme (car g est essentiel).

(ii) Si hg est un monomorphisme, il en est de même de hgf. Comme gf est essentiel, h est un monomorphisme. □

PROPOSITION 4.2. *Un monomorphisme $f : M \to E$ est essentiel si et seulement si E est une extension essentielle de $f(M)$.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. Soit en effet N un sous-module de E tel que $N \cap f(M) = 0$. Alors la composition de $f : M \to E$ avec la projection canonique $p : E \to E/N$ est un monomorphisme puisque $x \in \operatorname{Ker}(pf)$ donne $f(x) \in \operatorname{Ker} p = N$ donc $f(x) \in N \cap f(M) = 0$ et $x = 0$ puisque f est un monomorphisme. Comme f est essentiel, p est un monomorphisme. Donc $N = 0$.

Suffisance. Soit $h : E \to F$ tel que hf est un monomorphisme et supposons $N = \operatorname{Ker} h \neq 0$. Alors $N \cap f(M) \neq 0$ donne un $x \in M$ non nul tel que $f(x) \in N$. Donc $hf(x) = 0$, une contradiction. Par conséquent, $N = 0$. □

Le résultat suivant montre que l'on peut caractériser l'injectivité par l'absence d'extensions essentielles propres.

LEMME 4.3. *Un A-module M est injectif si et seulement s'il n'a pas d'extensions essentielles propres.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. Supposons M injectif et $M \subsetneqq E$. Par (3.3), M est un facteur direct de E: il existe $N \subsetneqq E$ tel que $N \neq 0$ et $E = M \oplus N$. En particulier, $M \cap N = 0$ et E ne peut être une extension essentielle de M.

Suffisance. Soit M un module sans extensions essentielles propres. On veut montrer que M est injectif. Par (3.10), il existe un A-module injectif E contenant M. Le lemme de Zorn affirme d'autre part l'existence d'un sous-module N de E maximal pour la propriété que $M \cap N = 0$. Notons $j : M \to E$ l'inclusion, et $p : E \to E/N$ la projection canonique. Comme $M \cap N = 0$, on a que $pj : M \to E/N$ est un monomorphisme. D'autre part, E/N est une extension essentielle de M, puisque si $0 \neq L/N \subseteq E/N$, alors $L \supsetneqq N$ et la maximalité de N entraînent $L \cap M \neq 0$ et donc $(L/N) \cap M \neq 0$. L'hypothèse entraîne que pj est un isomorphisme. Donc j est une section et M est facteur direct de l'injectif E. Par conséquent, M est injectif. □

On dira qu'une extension essentielle E d'un module M est *maximale* si M n'admet pas d'extension essentielle E' telle que $E \subsetneqq E'$. Le théorème suivant montre que ce sont les modules que nous cherchions.

THÉORÈME 4.4. *Soient $M \subseteq E$ deux A-modules. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *E est une extension essentielle maximale de M.*
(ii) *E est une extension essentielle de M et est injectif.*

(iii) *E est injectif et il n'existe pas de module injectif I tel que $M \subseteq I \subsetneqq E$.*

En outre, pour tout A-module M, il existe un A-module E satisfaisant les conditions équivalentes précédentes.

DÉMONSTRATION. (i) implique (ii). Par (4.1)(i), la relation "est une extension essentielle" est transitive. Par conséquent, l'hypothèse implique que E n'a pas d'extension essentielle propre. Par (4.3), E est injectif.

(ii) implique (iii). En effet, s'il existait un tel I, son injectivité entraînerait l'existence d'un module non nul $I' \subseteq E$ tel que $E = I \oplus I'$. Comme $M \subseteq I$, on aurait $M \cap I' = 0$, une contradiction.

(iii) implique (i). Par (3.10), pour un module M donné, il existe un A-module injectif I contenant M. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des extensions essentielles de M contenues dans I. Il est clair que $\mathcal{E} \neq \emptyset$, puisque $M \in \mathcal{E}$. Il est facile de voir que l'ensemble $\mathcal{E}$, ordonné par inclusion, est inductif. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ contient un élément maximal E. On affirme que E est une extension essentielle maximale de M. Supposons que ce n'est pas le cas, et soit E' une extension essentielle de M telle que $E \subsetneq E'$. Comme I est injectif, l'inclusion $j : E \to I$ se prolonge en un morphisme $f : E' \to I$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & E' \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & I & \end{tikzcd} .$$

On affirme que f est un monomorphisme. En effet, E et E' sont toutes deux des extensions essentielles de M et $E \subseteq E'$. Par (4.1)(ii), E' est une extension essentielle de E donc l'inclusion $i : E \to E'$ est essentielle. Comme $fi = j$ est un monomorphisme, il en est de même de f.

Cela montre que $f(E')$ est une extension essentielle de M contenue dans I. La maximalité de E donne $f(E') = E$ et donc f induit un isomorphisme entre E et E'. Cela montre que E est une extension essentielle maximale de M et en particulier, est un module injectif. Mais alors, par hypothèse, $E = I$.

Enfin, l'existence de E suit de la construction. □

Ainsi, on a établi l'existence d'un plus petit module injectif contenant un module donné, qu'on a caractérisé par les propriétés équivalentes du théorème (4.4). Il est utile de pouvoir également le caractériser comme suit.

DÉFINITION. Soit M un A-module. Une *enveloppe injective* de M est une paire (I, j), où I est un A-module injectif et $j : M \to I$ est un monomorphisme tel que, si (I', j') est une autre paire, avec I' un A-module injectif et $j' : M \to I'$ un monomorphisme, alors il existe un monomorphisme $f : I \to I'$ tel que $fj = j'$.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j'"'] & I \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& I' &
\end{tikzcd}$$

Par abus de langage, on dit souvent que I est l'enveloppe injective de M. On note qu'avec les notations de la définition, $f : I \to I'$ étant un monomorphisme de source injective est une section: cela montre que l'enveloppe injective d'un A-module M est un facteur direct de tout injectif contenant M. Nous montrons maintenant que cette notion coïncide avec celle d'extension essentielle maximale.

THÉORÈME 4.5. *Pour tout A-module M, il existe une enveloppe injective, unique à isomorphisme près. Celle-ci est isomorphe à une extension essentielle maximale de M.*

DÉMONSTRATION. Existence. Soient I une extension essentielle maximale de M et $j : M \to I$ l'inclusion. Par (4.4), I est injectif. Soit donc (I', j') une paire comme dans la définition. L'injectivité de I' donne un morphisme $f : I \to I'$ tel que $fj = j'$. Comme j' est un monomorphisme et j est essentiel (par (4.2)), f est un monomorphisme.

Unicité. On a vu que la paire (I, j) avec I une extension essentielle maximale de M, et $j : M \to I$ l'inclusion satisfait la propriété voulue. Soit (I', j') une autre paire satisfaisant cette propriété. Alors il existerait un monomorphisme $g : I' \to I$ tel que $gj' = j$. Comme I' est injectif, il existerait $I'' \subseteq I$ tel que $I'' \neq 0$ et $I = I' \oplus I''$. Mais alors $I' \cap I'' = 0$ et $M \subseteq I'$ donneraient $M \cap I'' = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que I est une extension essentielle de M. □

COROLLAIRE 4.6. *Soit $j : M \to I$ un morphisme de A-modules. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *(I, j) est une enveloppe injective de M.*

(ii) *j est un monomorphisme avec I une extension essentielle maximale de M.*

(iii) *j est un monomorphisme essentiel et I est injectif.*

DÉMONSTRATION. Il suit du théorème (4.5) que (i) équivaut à (ii) et du théorème (4.4) que (ii) équivaut à (iii). □

Il est naturel de se demander si les résultats duals sont valables pour les modules projectifs. La notion duale de celle de monomorphisme essentiel est celle d'épimorphisme superflu. Nous l'étudierons au chapitre VII. La définition d'enveloppe injective se laisse aussi dualiser aisément. Pour un A-module M, une couverture projective de M (voir chapitre VIII) est une paire (P, p) où P_A est projectif et $p : P \to M$ est un épimorphisme tel que, si (P', p') est une autre paire avec P' projectif et $p' : P' \to M$ un épimorphisme, il existe un épimorphisme $f : P' \to P$ tel que $pf = p'$.

$$\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "p'"] & \\
P \arrow[r, "p"] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, P est un facteur direct de tout projectif P' "couvrant" M. Néanmoins l'énoncé dual de (4.5) n'est généralement pas vrai: pour une algèbre quelconque, un A-module n'admet pas nécessairement de couverture projective. Comme nous le verrons plus loin, il sera nécessaire de faire des hypothèses sur l'algèbre.

Exercices du Chapitre IV.

1. Soient $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ un foncteur exact et covariant, M un A-module et M_1, M_2 deux sous-modules de M. Montrer que $F(M_1+M_2) = F(M_1)+F(M_2)$ et $F(M_1 \cap M_2) = F(M_1) \cap F(M_2)$.

2. Soit un diagramme de $\operatorname{Mod} A$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

où P est projectif. Montrer qu'il existe $h : P \to M$ tel que $fh = g$ si et seulement si $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$.

3. Énoncer et prouver le dual de l'exercice précédent.

4. Dans le diagramme à ligne exacte de $\operatorname{Mod} A$

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d, "f'"'] & & P'' \arrow[d, "f''"] & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "v"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

P', P'' sont projectifs. Construire un module projectif P et des morphismes u', v', f tels que l'on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f'"'] & P \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "f"] & P'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "v"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Montrer que, si f' et f'' sont surjectifs, f l'est aussi.

5. Énoncer et prouver le dual de l'exercice précédent.

6. Soit un diagramme commutatif de $\operatorname{Mod} A$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \end{tikzcd}$$

avec P projectif, $gf = 0$ et la ligne du bas exacte. Trouver un morphisme $P \to N'$ qui rende le diagramme commutatif.

7. Énoncer et prouver le dual de l'exercice précédent.

8. Soient A une K-algèbre, P un A-module projectif, et I un idéal bilatère de A. Montrer que P/PI est un A/I-module projectif.

9. Montrer que tout module de type fini est quotient d'un module projectif de type fini.

10. On considère un entier positif fixe $n > 1$ et le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ défini par $f(x) = nx$.

(i) Montrer que l'on a une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

(ii) Montrer que la suite précédente n'est pas scindée (et donc $\mathbb{Z}_n$ n'est pas projectif).

(iii) En déduire qu'un $\mathbb{Z}$-module (= groupe abélien) de type fini est projectif si et seulement s'il est libre.

11. Montrer que, si $n = rs$ est un entier positif et $r, s > 1$, le $\mathbb{Z}_n$-module $r\mathbb{Z}_n$ est projectif mais n'est pas libre.

12. Montrer le lemme de Schanuel: si

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

sont deux suites exactes courtes, avec P_1 et P_2 projectifs alors $K_1 \oplus P_2 \xrightarrow{\sim} K_2 \oplus P_1$.

13. Énoncer et prouver le dual de l'exercice précédent.

14. Montrer que si P_A est un A-module projectif engendré par m éléments, alors P_A est un facteur direct de $A_A^{(m)}$.

15. Montrer le théorème de la base projective: un A-module P est projectif si et seulement s'il existe des familles $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de P et $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'éléments de $\mathrm{Hom}_A(P, A)$ telles que:

(i) Pour tout $x \in P$, la famille $(f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda}$ est à support fini.

(ii) $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) a_\lambda$ pour tout $x \in P$.

Si P est projectif, la famille $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ peut être prise comme étant un ensemble quelconque de générateurs de P.

16. Soit A un domaine d'intégrité principal. Montrer que si P est projectif, alors $xa = 0$ pour $x \in P$ et $a \in A$ entraîne $x = 0$ ou $a = 0$ (on dit alors que P est *sans torsion*).

17. Soient A un domaine d'intégrité principal ayant Q pour corps des fractions et soit I un idéal non nul de A. Montrer que I est projectif si et seulement si I est inversible, c'est-à-dire qu'il existe des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n \in Q$ tels que $q_i I \subseteq A$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\sum a_i q_i = 1$. En déduire qu'un idéal projectif de A est nécessairement de type fini.

18. Montrer que si P_A est projectif alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}({}_{\mathbb{Z}}P_A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un A^{op}-module injectif.

19. Montrer que P est projectif si et seulement si pour tout épimorphisme $f : I \to I''$ avec I injectif, et tout morphisme $u : P \to I''$, il existe $v : P \to I$ tel que $fv = u$.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow^{v} & \downarrow u & & \\ I & \xrightarrow{f} & I'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

20. Énoncer et résoudre le dual de l'exercice précédent.

21. Soient K un anneau commutatif, I un K-module injectif et A une K-algèbre. Montrer que $\mathrm{Hom}_K(A, I)$ est un A-module injectif.

22. Soit K un corps. Montrer que tout K-espace vectoriel est un K-module injectif.

23. Soient p nn nombre premier, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ et $g : \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_p$ les surjections canoniques. Montrer que le produit fibré de f et g est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$.

24. Soient $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ l'inclusion, et $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la multiplication par n. Montrer que la somme amalgamée de f et g est isomorphe à $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_n$.

25. Montrer que, si M_1, M_2 et $M_1 \cap M_2$ sont des sous-modules injectifs d'un module M, alors $M_1 + M_2$ est aussi injectif.

26. Énoncer et résoudre le dual de l'exercice précédent.

27. Soient A un domaine d'intégrité principal et Q son corps de fractions. Montrer que Q_A est divisible (et donc injectif).

28. Soient A un domaine d'intégrité principal et Q son corps de fractions. Montrer que Q_A est l'enveloppe injective de A_A.

29. Montrer que tout A-module à droite est injectif si et seulement si tout idéal à droite de A est facteur direct de A.

30. Soient $M \subseteq E$ deux modules. Montrer que E est une extension essentielle de M si et seulement si, pour chaque $x \in E$, soit $x = 0$ soit il existe $a \in A$ tel que $0 \neq xa \in M$.

31. Soient $M \subseteq E$ deux modules et $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une chaîne de sous-modules de E pour l'inclusion, chaque E_λ étant une extension essentielle de M. Montrer que $\cup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ est une extension essentielle de M (Indication: utiliser l'exercice précédent).

32. Soient M_1, M_2 deux modules d'enveloppes injectives respectives E_1, E_2. Montrer que $E_1 \oplus E_2$ est l'enveloppe injective de $M_1 \oplus M_2$.

33. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur adjoint à gauche d'un fonctenr $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Montrer l'existence de morphismes fonctoriels $FG \to 1_\mathcal{D}$ et $1_\mathcal{C} \to GF$ (qui ne sont pas nécessairement des isomorphismes fonctoriels).

34. Soient A une K-algèbre et e un idempotent de A (c'est-à-dire nn élément $e \in A$ tel que $e^2 = e$). Montrer que $A_A = eA \oplus (1 - e)A$. En déduire que tout A-module de la forme eA est projectif.

35. Montrer qu'un A-module injectif Q_A est un cogénérateur injectif de $\operatorname{Mod} A$ si et seulement si le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-, Q)$ est fidèle.

CHAPITRE V

Produits tensoriels. Algèbres tensorielle et extérieure.

Plusieurs problèmes font intervenir par exemple trois modules L, M, N et une application bilinéaire $L \times M \to N$. Aux fins d'appliquer les techniques que nous connaissons, on aimerait pouvoir remplacer $L \times M$ par un module T et l'application bilinéaire précédente par une application linéaire $T \to N$. De même, on aimerait pouvoir remplacer un produit fini $M_1 \times \cdots \times M_n$ par un module T, et une application multilinéaire $M_1 \times \cdots \times M_n \to N$ par une application linéaire $T \to N$. Le lecteur a reconnu que l'on a là l'énoncé d'une propriété universelle. Celle-ci permet de définir la notion de produit tensoriel de modules dont le but est de linéariser certaines applications bilinéaires ou multilinéaires. On étudiera la relation du produit tensoriel avec les modules d'homomorphismes avant d'aborder l'étude de diverses algèbres définies à l'aide de cette notion.

1. Produit tensoriel de modules.

Soit A une K-algèbre. On se donne deux modules L_A et ${}_AM$. Une application g du K-module produit $L \times M$ dans un K-module X est dite *A-bilinéaire* si

$$\begin{gathered} g\,(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2, y) = g\,(x_1, y)\,\alpha_1 + g\,(x_2, y)\,\alpha_2 \\ g\,(x, y_1\beta_1 + y_2\beta_2) = g\,(x, y_1)\,\beta_1 + g\,(x, y_2)\,\beta_2 \\ g(xa, y) = g(x, ay) \end{gathered}$$

pour tous $x, x_1, x_2 \in L$, $y, y_1, y_2 \in M$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$ et $a \in A$.

DÉFINITION. Un *produit tensoriel* de L_A et ${}_AM$ est défini par la donnée d'uue paire (T, t), où T est un K-module et $t : L \times M \to T$ est une application A-bilinéaire, telle que, pour toute paire (X, g), où X est un K-module et $g : L \times M \to X$ est une application A-bilinéaire, il existe une unique application K-linéaire $\overline{g} : T \to X$ telle que $\overline{g}t = g$.

$$\begin{tikzcd} L \times M \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, dashed, "\overline{g}"] \\ & X \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, le produit tensoriel transforme toute application bilinéaire de source $L \times M$ en une application linéaire de source T.

THÉORÈME 1.1. *Soient L_A et $_AM$ deux A-modules, il existe dans* $\operatorname{Mod} K$ *un produit tensoriel de L et M, unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. Il suit de l'universalité qu'il suffit de montrer l'existence d'un tel produit. Soit $K^{(L\times M)}$ le K-module libre sur l'ensemble $L \times M$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{\lambda\in\Lambda} (x_\lambda, y_\lambda)\, \alpha_\lambda$ avec $x_\lambda \in L$, $y_\lambda \in M$ et $\alpha_\lambda \in K$ tels que $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ soit à support fini, et soit R le sous-module de $K^{(L\times M)}$ engendré par les éléments des formes suivantes:

$$\begin{gathered}
(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2, y) - (x_1, y)\,\alpha_1 - (x_2, y)\,\alpha_2 \\
(x, y_1\beta_1 + y_2\beta_2) - (x, y_1)\,\beta_1 - (x, y_2)\,\beta_2 \\
(xa, y) - (x, ay)
\end{gathered}$$

où $x, x_1, x_2 \in L$, $y, y_1, y_2 \in M$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$ et $a \in A$. Posons $T = K^{(L\times M)}/R$, et soit t la composition de l'injection canonique $j : L\times M \to K^{(L\times M)}$ et de la projection canonique $p : K^{(L\times M)} \to T$. Par définition de R, l'application t est A-bilinéaire.

Soit (X, g) une paire comme dans la définition. Comme $K^{(L\times M)}$ est un K-module libre, il existe un unique morphisme de K-modules $g' : K^{(L\times M)} \to X$ tel que $g'j = g$. Comme g est bilinéaire, g' s'annule sur les générateurs de R, et donc $g'(R) = 0$. Par conséquent, g' se factorise par $K^{(L\times M)}/R$, c'est-à-dire qu'il existe un unique morphisme de K-modules $\overline{g} : K^{(L\times M)}/R \to X$ tel que $\overline{g}p = g'$. Mais alors on a $\overline{g}t = \overline{g}pj = g'j = g$.

$$\begin{tikzcd}
L \times M \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "g"'] & K^{(L\times M)} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g'"] & K^{(L\times M)}/R \arrow[dl, dashed, "\overline{g}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Enfin, $\overline{g}$ est uniquement déterminé par g, car si $\overline{g}_1 t = \overline{g}_2 t$ alors $\overline{g}_1 pj = \overline{g}_2 pj$ entraîne que $\overline{g}_1 p$ et $\overline{g}_2 p$ coïncident sur une base du K-module libre $K^{(L\times M)}$ donc sont égales. Comme p est un épimorphisme, $\overline{g}_1 p = \overline{g}_2 p$ implique $\overline{g}_1 = \overline{g}_2$. $\square$

Par abus de langage, on dira que le K-module T est le produit tensoriel de L et M, et l'on notera $T = L \otimes_A M$. Le K-module $L \otimes_A M$ est engendré par les éléments de la forme $t(x, y) = x \otimes y$ (où $x \in L$, $y \in M$) appelés des *tenseurs*. Par conséquent, uu élément arbitraire de $L \otimes_A M$ est de la forme $\sum_{\lambda\in\Lambda} (x_\lambda \otimes y_\lambda)\, \alpha_\lambda$, où $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille d'éléments de K à support fiui. En outre, les relations suivantes sont satisfaites:

$$\begin{gathered}
(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2) \otimes y = (x_1 \otimes y)\,\alpha_1 + (x_2 \otimes y)\,\alpha_2 \\
x \otimes (y_1\beta_1 + y_2\beta_2) = (x \otimes y_1)\,\beta_1 + (x \otimes y_2)\,\beta_2 \\
x \otimes ay = xa \otimes y
\end{gathered}$$

pour $x, x_1, x_2 \in L$, $y, y_1, y_2 \in M$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$ et $a \in A$.

Observons qu'alors que L est un A-module à droite, M un A-module à gauche, le produit tensoriel $L \otimes_A M$ n'est muni que d'une structure de K-module. Si, néanmoins, A, B, C sont trois K-algèbres, ${}_BL_A$ est un $(B-A)$-bimodule, et ${}_AM_C$ est un $(A-C)$-bimodule, alors le produit tensoriel $L \otimes_A M$ est muni d'une structure naturelle de $(B-C)$-bimodule par

$$b(x \otimes y)c = (bx) \otimes (yc)$$

(pour $b \in B$, $x \in L$, $y \in M$ et $c \in C$). On laisse au lecteur la vérification immédiate des axiomes.

Il est important de remarquer que le produit tensoriel de deux modules non nuls peut se réduire à zéro. Soient en effet m, n deux entiers copremiers, alors $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0$. On sait qu'il existe $s, t \in \mathbb{Z}$ tels que $ms + nt = 1$ (c'est ce qu'on appelle la *relation de Bezout*), donc, pour tous $x \in \mathbb{Z}_m$, $y \in \mathbb{Z}_n$, on a

$$x \otimes y = ms(x \otimes y) + nt(x \otimes y) = s(mx \otimes y) + t(x \otimes ny) = 0.$$

Comme $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n$ est engendré par les éléments de la forme $x \otimes y$, on a bien $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0$.

Comme on l'a vu en (III.3), l'énoncé d'une propriété universelle mène à un processus de fonctorisation. Soient $f : L_A \to L'_A$ et $g : {}_AM \to {}_AM'$ deux applications A-linéaires, alors l'application $f \times g : L \times M \to L' \times M'$ définie par $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$ (pour $(x, y) \in L \times M$) donne, par composition avec l'application canonique $t' : L' \times M' \to L' \otimes_A M'$ une application A-bilinéaire $t'(f \times g) : L \times M \to L' \otimes_A M'$. Par conséquent, il existe un unique morphisme de K-modules $f \otimes g : L \otimes_A M \to L' \otimes_A M'$ rendant le carré suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} L \times M & \xrightarrow{t} & L \otimes_A M \\ {\scriptstyle f \times g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \otimes g} \\ L' \times M' & \xrightarrow{t'} & L' \otimes_A M' \end{array} .$$

Si $f' : L'_A \to L''_A$, $g' : {}_AM' \to {}_AM''$ est une autre paire d'applications A-linéaires, il suit du même raisonnement que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L \times M & \xrightarrow{t} & L \otimes_A M \\ {\scriptstyle f \times g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \otimes g} \\ L' \times M' & \xrightarrow{t'} & L' \otimes_A M' \\ {\scriptstyle f' \times g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f' \otimes g'} \\ L'' \times M'' & \xrightarrow{t''} & L'' \otimes_A M'' \end{array} .$$

L'unicité dans la propriété universelle donne alors que

$$(f' \otimes g')(f \otimes g) = (f'f) \otimes (g'g).$$

Si en particulier $M = M' = M''$ et $g' = g = 1_M$, on a $(f'f) \otimes 1_M = (f' \otimes 1_M)(f \otimes 1_M)$. Avec l'équation évidente $1_{L \otimes M} = 1_L \otimes 1_M$, cela montre que la correspondance $- \otimes_A M : L \mapsto L \otimes_A M$, $f \mapsto f \otimes 1_M$ définit un foncteur covariant de $\operatorname{Mod} A$ dans $\operatorname{Mod} K$. De même, la correspondance $L_A \otimes - : M \mapsto L \otimes_A M$, $g \mapsto 1_L \otimes g$ définit un foncteur covariant de $\operatorname{Mod} A^{\mathrm{op}}$ dans $\operatorname{Mod} K$, de sorte que le produit tensoriel $- \otimes_A - : (L, M) \mapsto L \otimes_A M$, $(f, g) \mapsto f \otimes g$ définit un bifoncteur de $\operatorname{Mod} A \times \operatorname{Mod} A^{\mathrm{op}}$ dans $\operatorname{Mod} K$, covariant en chaque variable. En fait, on a un résultat un peu plus général.

PROPOSITION 1.2. *Soient A, B deux K-algèbres, et ${}_AM_B$ un $(A-B)$-bimodule. La correspondance $- \otimes_A M_B : L_A \mapsto L \otimes_A M_B$, $f \mapsto f \otimes 1_M$ définit un foncteur covariant de* $\operatorname{Mod} A$ *dans* $\operatorname{Mod} B$, *et la correspondance ${}_AM_B \otimes - : {}_BN \mapsto {}_AM \otimes_B N$, $g \mapsto 1_N \otimes g$ définit un foncteur covariant de* $\operatorname{Mod} B^{op}$ *dans* $\operatorname{Mod} A^{op}$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que, pour toute application A-linéaire $f : L_A \to L'_A$, l'application $f \otimes 1_M : L \otimes_A M \to L' \otimes_A M$ est B-linéaire, et cela suit immédiatement de la définition de la structure canonique de B-module sur $L \otimes_A M$ et $L' \otimes_A M$. On montre de même le second énoncé. □

En particulier, si A est une K-algèbre commutative, et M un A-module, les foncteurs $- \otimes_A M$ et $M \otimes_A -$ sont des foncteurs covariants de $\operatorname{Mod} A$ dans $\operatorname{Mod} A$.

PROPOSITION 1.3. (i) *Soient A une K-algèbre commutative, et L, M deux A-modules. On a un isomorphisme fonctoriel en chaque variable*

$$L \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A L.$$

(ii) *Soient A, B deux K-algèbres et L_A, ${}_AM_B$, ${}_BN$ trois modules. On a un isomorphisme fonctoriel en chaque variable*

$$L \otimes_A (M \otimes_B N) \xrightarrow{\sim} (L \otimes_A M) \otimes_B N.$$

DÉMONSTRATION. (i) L'application $L \times M \to M \otimes L$ définie par $(x, y) \mapsto y \otimes x$ (pour $x \in L$, $y \in M$) est A-bilinéaire et induit donc une application linéaire $f : L \otimes M \to M \otimes L$ telle que $f(x \otimes y) = y \otimes x$. De même, on construit $g : M \otimes L \to L \otimes M$ telle que $g(y \otimes x) = x \otimes y$. Il est clair que f et g sont des morphismes fonctoriels et mutuellement inverses.

(ii) Soit z un élément fixe de N. On définit un morphisme $f_z : M \to M \otimes_B N$ par $f_z(y) = y \otimes z$ (pour $y \in M$). Ce morphisme de A-modules à gauche induit un morphisme de K-modules $g_z = 1_L \otimes f_z : L \otimes_A M \to L \otimes_A (M \otimes_B N)$ tel que $x \otimes y \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ (pour $x \in L$). L'application $\varphi : (L \otimes_A M) \times N \to L \otimes_A (M \otimes_B N)$ définie par $\varphi(m, z) = g_z(m)$ (pour $m \in L \otimes_A M$) est B-linéaire et donc induit un morphisme $(L \otimes_A M) \otimes_B N \to L \otimes_A (M \otimes_B N)$ qui est K-linéaire et tel que $(x \otimes y) \otimes z$ s'applique sur $x \otimes (y \otimes z)$. On construit de même un morphisme $L \otimes_A (M \otimes_B N) \to (L \otimes_A M) \otimes_B N$ tel que $x \otimes (y \otimes z)$ s'applique sur $(x \otimes y) \otimes z$. Il est clair que ces deux morphismes sont fonctoriels et mutuellement inverses. □

THÉORÈME 1.4. *Soit A une K-algèbre. Pour tous A-modules L_A et ${}_AM$, on a des isomorphismes fonctoriels*

$$L \otimes_A A_A \xrightarrow{\sim} L_A \quad \text{et} \quad {}_AA \otimes_A M \xrightarrow{\sim} {}_AM.$$

DÉMONSTRATION. Les applications $L \otimes_A A \to L$ et $L \to L \otimes_A A$ définies respectivement par $x \otimes a \mapsto xa$ et $x \mapsto x \otimes 1$ (pour $x \in L$, $a \in A$) sont A-linéaires, fonctorielles et mutuellement inverses. Cela montre le premier isomorphisme. Le second est prouvé de la même façon. □

THÉORÈME 1.5. *Soient $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de A-modules à droite et $(M_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ une famille de A-modules à gauche. Alors il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda\right) \otimes \left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} M_\sigma\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{(\lambda,\sigma) \in \Lambda \times \Sigma} (L_\lambda \otimes M_\sigma).$$

DÉMONSTRATION. L'application

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda\right) \times \left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} M_\sigma\right) \to \bigoplus_{(\lambda,\sigma) \in \Lambda \times \Sigma} (L_\lambda \otimes_A M_\sigma)$$

définie par $\left((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, (y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}\right) \mapsto (x_\lambda \otimes y_\sigma)_{(\lambda,\sigma) \in \Lambda \times \Sigma}$ (pour $x_\lambda \in L_\lambda$, $y_\sigma \in M_\sigma$) est A-bilinéaire, donc induit un morphisme

$$f : \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} M_\sigma\right) \to \bigoplus_{(\lambda,\sigma) \in \Lambda \times \Sigma} (L_\lambda \otimes_A M_\sigma)$$

tel que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \otimes (y_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \mapsto (x_\lambda \otimes y_\sigma)_{(\lambda,\sigma) \in \Lambda \times \Sigma}$.

Pour construire la réciproque, on note $q_\lambda : L_\lambda \to \bigoplus_{\mu \in \Lambda} L_\mu$, $q'_\sigma : M_\sigma \to \bigoplus_{\omega \in \Sigma} M_\omega$ et $q''_{\lambda\sigma} : L_\lambda \otimes_A M_\sigma \to \bigoplus_{(\mu,\omega) \in \Lambda \times \Sigma} (L_\mu \otimes_A M_\omega)$ les injections canoniques respectives. On considère la famille de morphismes

$$q_\lambda \otimes q'_\sigma : L_\lambda \otimes_A M_\sigma \to \left(\bigoplus_{\mu \in \Lambda} L_\mu\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{\omega \in \Sigma} M_\omega\right).$$

Par la propriété universelle de la somme directe, il existe un unique morphisme $g : \bigoplus_{(\lambda,\sigma) \in \Lambda \times \Sigma} (L_\lambda \otimes M_\sigma) \to \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda\right) \otimes_A \left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} M_\sigma\right)$ tel que $gq''_{\lambda\sigma} = q_\lambda \otimes q'_\sigma$.

Mais alors on a

$$\begin{aligned} g\left((x_\lambda \otimes y_\sigma)_{(\lambda,\sigma)\in\Lambda\times\Sigma}\right) &= g\left(\sum_{(\lambda,\sigma)\in\Lambda\times\Sigma} q''_{\lambda\sigma}(x_\lambda \otimes y_\sigma)\right) \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\sigma\in\Sigma}(q_\lambda \otimes q'_\sigma)(x_\lambda \otimes y_\sigma) \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} q_\lambda(x_\lambda) \otimes \sum_{\sigma\in\Sigma} q'_\sigma(y_\sigma) \\ &= (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \otimes (y_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}. \end{aligned}$$

On voit bien que f et g sont mutuellement inverses. La fonctorialité est un exercice facile laissé au lecteur. □

Ce théorème s'applique en particulier dans les deux cas suivants. Soient $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules à droite et M un A-module à gauche, alors il existe un isomorphisme fonctoriel

$$\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda\right) \otimes_A M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_A M).$$

De même, si L est un A-module à droite, et $(M_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ une famille de A-modules à gauche, il existe un isomorphisme fonctoriel

$$L \otimes_A \left(\bigoplus_{\sigma\in\Sigma} M_\sigma\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma\in\Sigma}(L \otimes_A M_\sigma).$$

Un corollaire nous dit ce qui se passe pour un module libre.

COROLLAIRE 1.6. *Soient L_A, ${}_AM$ deux A-modules et Λ un ensemble. On a des isomorphismes fonctoriels*

$$L \otimes_A A^{(\Lambda)} \xrightarrow{\sim} L_A^{(\Lambda)} \quad \textit{et} \quad A^{(\Lambda)} \otimes_A M \xrightarrow{\sim} {}_AM^{(\Lambda)}.$$

DÉMONSTRATION. (1.4) et (1.5). □

Si, en particulier, Λ est un ensemble fini ayant n éléments, on a

$$L \otimes_A A^{(n)} \xrightarrow{\sim} L_A^{(n)} \quad \text{et} \quad A^{(n)} \otimes_A M \xrightarrow{\sim} {}_AM^{(n)}.$$

COROLLAIRE 1.7. *Pour tous $m, n > 0$ on a $A^{(m)} \otimes_A A^{(n)} \xrightarrow{\sim} A^{(mn)}$. En particulier, si K est un corps et E, F sont des K-espaces vectoriels de dimension finie, on a* $\dim_K(E \otimes F) = \dim_K E \cdot \dim_K F$. □

En fait, si $\{x_1, \cdots, x_m\}$ est une base du K-espace vectoriel E, et $\{y_1, \ldots, y_n\}$ est une base du K-espace vectoriel F, il suit de la définition du produit tensoriel que l'ensemble $\{x_i \otimes y_j \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ est un ensemble générateur de $E \otimes F$. Comme, par (1.7), sa cardinalité est égale à la dimension de $E \otimes F$, il en constitue une base.

Ces considérations permettent de décrire la matrice du produit tensoriel de deux applications linéaires entre K-espaces vectoriels. Soient en effet E, E', F, F'

des K-espaces vectoriels munis respectivement des bases $\{x_1, \dots, x_m\}$, $\{x'_1, \dots, x'_p\}$, $\{y_1, \dots, y_n\}$, $\{y'_1, \dots, y'_q\}$, et soient $f : E \to E'$ et $g : F \to F'$ deux applications linéaires ayant pour matrices respectives par rapport à ces bases $\mathbf{a} = [\alpha_{ij}]$ et $\mathbf{b} = [\beta_{ij}]$. On cherche la matrice de $f \otimes g : E \otimes F \to E' \otimes F'$ par rapport aux bases $\{x_i \otimes y_j \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ et $\{x'_k \otimes y'_\ell \mid 1 \leq k \leq p,\ 1 \leq \ell \leq q\}$ respectivement. Or

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(x_i \otimes y_j) &= f(x_i) \otimes g(y_j) \\ &= \left(\sum_k \alpha_{ki} x'_k\right) \otimes \left(\sum_\ell \beta_{\ell j} y'_\ell\right) \\ &= \sum_{k,\ell} (\alpha_{ki}\beta_{\ell j})(x'_k \otimes y'_\ell) .\end{aligned}$$

La matrice cherchée est donc la matrice $[\alpha_{ki}\beta_{\ell j}]_{(i,j)(k,\ell)}$ qu'on appelle parfois *produit tensoriel des matrices* $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ et qu'on note $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Si par exemple $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sont données dans les bases canoniqnes par les matrices

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

respectivement, alors $f \otimes g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est donnée par

$$\begin{bmatrix} aa' & ab' & ba' & bb' \\ ac' & ad' & bc' & bd' \\ ca' & cb' & da' & bb' \\ cc' & cd' & dc' & dd' \end{bmatrix} .$$

Nous achevons cette section en montrant qu'on peut définir également le produit tensoriel de deux algèbres. Soient en effet A, B deux K-algèbres. On sait que le produit tensoriel $A \otimes_K B$ est muni d'une structure naturelle de K-module. Nous allons maintenant montrer qu'il est également doté d'une structure de K-algèbre.

THÉORÈME 1.8. *Soient A, B deux K-algèbres. Alors $A \otimes_K B$ est muni d'une structure naturelle de K-algèbre, qui est commutative si et seulement si A et B le sont.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de définir le produit de deux éléments des formes $a_1 \otimes b_1$ et $a_2 \otimes b_2$ avec $a_1, a_2 \in A$ et $b_1, b_2 \in B$. On pose

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2) .$$

Le reste est une vérification facile laissée au lecteur. □

Un cas particulier important est celui où $B = M_n(K)$, avec K un corps. On sait alors par l'exemple (I.1.2)(b) que B admet pour base sur K l'ensemble des matrices $\mathbf{e}_{ij}$ avec $1 \leq i, j \leq n$. Si A est une K-algèbre, il suit de (1.6) que $A \otimes_K B$ est un A-module libre ayant pour base l'ensemble des éléments de la forme $1 \otimes \mathbf{e}_{ij}$ (pour $1 \leq i, j \leq n$) où 1 désigne l'identité de A. En outre, il suit de la définition de la multiplication dans $A \otimes_K B = A \otimes_K M_n(K)$ que l'on a

$$A \otimes_K M_n(K) \xrightarrow{\sim} M_n(A).$$

Si on a aussi $A = M_m(K)$, le terme de droite devient $M_n(M_m(K)) = M_{mn}(K)$, car les éléments de $M_n(M_m(K))$ ne sont autres que des $n \times n$ matrices dont les coefficients sont à leur tour des $m \times m$ matrices sur K. Ainsi, on trouve

$$M_m(K) \otimes_K M_n(K) \xrightarrow{\sim} M_{mn}(K).$$

2. Propriétés fonctorielles du produit tensoriel.

Le théorème fondamental suivant, qui n'est à proprement parler qu'une reformulation de la définition, exprime le fait que le produit tensoriel est un adjoint à gauche du foncteur Hom.

THÉORÈME 2.1 (D'ADJONCTION). *Soient A, B deux K-algèbres et L_A, ${}_AM_B$, N_B des modules. Il existe un isomorphisme de K-modules*

$$\mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M, N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N)$$

fonctoriel en chaque variable.

Ainsi, $- \otimes_A M$ est un adjoint à gauche de $\mathrm{Hom}_B(M, -)$.

DÉMONSTRATION. On considère les morphismes

$$f : \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M, N)) \to \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N)$$

défini par $\varphi \mapsto (x \otimes y \mapsto \varphi(x)(y))$ (pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M, N))$, $x \in L$ et $y \in M$), et

$$g : \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N) \to \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M, N))$$

défini par $\eta \mapsto (x \mapsto (y \mapsto \eta(x \otimes y)))$ (pour $\eta \in \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N)$, $x \in L$, $y \in M$). Ils sont K-linéaires, mutuellement inverses et fonctoriels en chaque variable. $\square$

Si C, D sont deux autres K-algèbres telles que ${}_CL_A$ est un $(C - A)$-bimodule et ${}_DN_B$ est un $(D - B)$-bimodule, on vérifie de suite que l'isomorphisme est un morphisme de $(D - C)$-bimodules.

On a bien entendu le résultat correspondant pour les A-modules à gauche, que nous citons à cause de son importance: si A, B sont deux K-algèbres et ${}_AL$, ${}_BM_A$, ${}_BN$ sont des modules, il existe un isomorphisme de K-modules

$$\mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M, N)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A L, N)$$

fonctoriel en chaque variable; ainsi $M \otimes_A -$ est un adjoint à gauche de $\mathrm{Hom}_B(M, -)$.

Nous en venons à l'étude de l'exactitude des foncteurs produit tensoriel. Alors que (et parce que) les foncteurs Hom sont exacts à gauche, les foncteurs produit tensoriel sont exacts à droite: en effet, cela suit du fait que le produit tensoriel est adjoint à gauche du foncteur Hom.

THÉORÈME 2.2. *Soit A une K-algèbre. Une suite de A-modules à gauche*

$$ {}_AM' \xrightarrow{\ f\ } {}_AM \xrightarrow{\ g\ } {}_AM'' \longrightarrow 0 $$

est exacte si et seulement si, pour tout A-module à droite L_A, la suite induite

$$ L \otimes_A M' \xrightarrow{1_L \otimes f} L \otimes_A M \xrightarrow{1_L \otimes g} L \otimes_A M'' \longrightarrow 0 $$

est exacte (en particulier, le foncteur $L \otimes_A -$ est exact à droite).

DÉMONSTRATION. La nécessité suit de (2.1) et de (IV.1.6), la suffisauce suit de (1.4) en posaut $L_A = A_A$. $\square$

Il faut remarquer que le foncteur $L \otimes_A -$ n'est pas exact à gauche en général (et donc pas exact): en effet, on considère, pour p premier, la suite exacte courte

$$ 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 $$

où $f : x \mapsto px$ (pour $x \in \mathbb{Z}$). Le foncteur $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} -$ donne une suite exacte à droite

$$ \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}_p} \otimes f} \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 $$

et même si $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p \neq 0$, on a $1_{\mathbb{Z}_p} \otimes f = 0$, puisque pour $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p$ et $x \in \mathbb{Z}$, $\left(1_{\mathbb{Z}_p} \otimes f\right)(\overline{a} \otimes x) = \overline{a} \otimes f(x) = \overline{a} \otimes px = p\overline{a} \otimes x = 0 \otimes x = 0$. En particulier, $1_{\mathbb{Z}_p} \otimes f$ ne peut être un monomorphisme.

COROLLAIRE 2.3. *Soit A une K-algèbre. Une suite de A-modules à gauche*

$$ 0 \longrightarrow {}_AM' \xrightarrow{\ f\ } {}_AM \xrightarrow{\ g\ } {}_AM'' \longrightarrow 0 $$

est exacte et scindée si et seulement si, pour tout A-module à droite L_A, la suite

$$ 0 \longrightarrow L \otimes_A M' \xrightarrow{1_L \otimes f} L \otimes_A M \xrightarrow{1_L \otimes g} L \otimes_A M'' \longrightarrow 0 $$

est exacte et scindée.

DÉMONSTRATION. Supposons en effet la première suite exacte et scindée. Il existe $f' : M \to M'$ tel que $f'f = 1_{M'}$. Alors $(1_L \otimes f')(1_L \otimes f) = 1_L \otimes 1_{M'} = 1_{L \otimes M'}$ donne bien que $1_L \otimes f$ est un monomorphisme et en fait une section. Réciproquement, si la suite du bas est exacte et scindée pour tout L_A, le résultat suit de (1.4) en posant $L_A = A_A$. $\square$

THÉORÈME 2.4. *Soit A une K-algèbre. Une suite de A-modules à droite*

$$ L'_A \xrightarrow{\ f\ } L_A \xrightarrow{\ g\ } L''_A \longrightarrow 0 $$

est exacte si et seulement si, pour tout A-module à gauche ${}_AM$, la suite induite

$$ L' \otimes_A M \xrightarrow{f \otimes 1_M} L \otimes_A M \xrightarrow{g \otimes 1_M} L'' \otimes_A M \longrightarrow 0 $$

est exacte (en particulier, le foncteur $- \otimes_A M$ est exact à droite).

DÉMONSTRATION. Semblable à celle de (2.2) et laissée au lecteur. $\square$

On note que le foncteur $-\otimes_A M$ n'est généralement pas exact à gauche (en effet, il suffit de considérer l'exemple qui suit (2.2), puisque $\mathbb{Z}$ est commutative).

COROLLAIRE 2.5. *Soit A une K-algèbre. Une suite de A-modules à droite*

$$0 \longrightarrow L'_A \xrightarrow{f} L_A \xrightarrow{g} L''_A \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée si et seulement si, pour tout A-module à gauche ${}_AM$, la suite induite

$$0 \longrightarrow L' \otimes_A M \xrightarrow{f\otimes 1_M} L \otimes_A M \xrightarrow{g\otimes 1_M} L'' \otimes_A M \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée.

DÉMONSTRATION. Semblable à celle de (2.3) et laissée au lecteur. □

COROLLAIRE 2.6. *Soient A une K-algèbre et I un idéal bilatère de A.*

(i) *Pour tout A-module à droite L_A, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$L \otimes_A A/I \xrightarrow{\sim} L/LI$$

défini par $x \otimes (a+I) \mapsto xa + LI$ (pour $x \in L$, $a \in A$).

(ii) *Pour tout A-module à gauche ${}_AM$, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$A/I \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M/IM$$

défini par $(a+I) \otimes x \mapsto ax + IM$ (pour $x \in M$, $a \in A$).

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (i), la démonstration de (ii) étant semblable. Or la suite exacte de A-modules à gauche

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{j} A \xrightarrow{p} A/I \longrightarrow 0$$

(où j et p sont respectivement l'inclusion et la projection canoniques) induit, en appliquant $L \otimes_A -$, un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & L\otimes_A I & \xrightarrow{1_L\otimes j} & L\otimes_A A & \xrightarrow{1_L\otimes p} & L\otimes_A A/I & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\
0 & \longrightarrow & LI & \xrightarrow{j'} & L & \xrightarrow{p'} & L/LI & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où j' et p' sont respectivement l'inclusion et la projection canoniques, f' et f sont définies par $x \otimes a \mapsto xa$ (pour $x \in L$ et $a \in I$ ou $a \in A$ respectivement) et f'' est définie par passage aux conoyaux, donc $f''(x \otimes (a+I)) = xa + LI$ (pour $x \in L$, $a \in A$). Comme f est un isomorphisme et p' un épimorphisme, le lemme du serpent (II.3.6) donne que $\operatorname{Coker} f'' = 0$ et donc f'' est nn épimorphisme. Comme LI est par définition engendré par les éléments de la forme xa (pour $x \in L$, $a \in I$), on a que f' est un épimorphisme. Donc $\operatorname{Ker} f'' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} f' = 0$ et f'' est bien un isomorphisme. □

En particulier, si $A = \mathbb{Z}$ et $n > 0$ est arbitraire, on a que, pour tout groupe abélien L, le produit tensoriel $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n$ s'identifie canoniquement à L/nL.

Il est naturel de considérer les modules pour lesquels le produit tensoriel est un foncteur exact.

DÉFINITION. Un A-module L_A est dit *plat* si le foncteur $L \otimes_A -$ est exact.

Comme $L \otimes_A -$ est toujours exact à droite, un module L_A est plat si et seulement si pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_AM' \longrightarrow {}_AM$$

de A-modules à gauche, la suite induite

$$0 \longrightarrow L \otimes_A M' \longrightarrow L \otimes_A M$$

est exacte. On a vu plus haut que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_p$ avec p premier n'est pas plat.

LEMME 2.7. *Soit $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules. Alors $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$ est plat si et seulement si chaque L_λ est plat.*

DÉMONSTRATION. Soit $f : {}_AM' \to {}_AM$ un monomorphisme. On a par (1.5) un diagramme commutatif où les flèches verticales sont des isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda\right) \otimes_A M' \arrow[r, "1_{\oplus L_\lambda}\otimes f"] \arrow[d, "\wr"] & \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda\right) \otimes_A M \arrow[d, "\wr"] \\
\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (L_\lambda \otimes_A M') \arrow[r, "\overline{f}"] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (L_\lambda \otimes_A M)
\end{tikzcd}$$

et où $\overline{f}$ est déduite des $1_{L_\lambda} \otimes f$ par passage aux sommes directes. Par conséquent, $1_{\oplus L_\lambda} \otimes f$ est un monomorphisme si et seulement si $\overline{f}$ est un monomorphisme, et c'est le cas si et seulement si chaque $1_{L_\lambda} \otimes f$ l'est (c'est-à-dire, chaque L_λ est plat). □

PROPOSITION 2.8. *Tout module libre, et tout module projectif, est plat.*

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer que A_A est un module plat. Si en effet $f : {}_AM' \to {}_AM$ est un monomorphisme, la commutativité du carré

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"] & M \arrow[d, "\wr"] \\
A \otimes_A M' \arrow[r, "1_A\otimes f"] & A \otimes_A M
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes fonctoriels de (1.4), donne que $1_A \otimes f$ est un monomorphisme.

Il suit alors que tout module libre est plat, par (2.7). Comme tout module projectif est facteur direct d'un module libre (IV.2.4), on a aussi, encore par (2.7), que tout module projectif est plat. □

Nous montrerons dans le chapitre VI que pour une classe très importante d'algèbres, la réciproque du deuxième énoncé est vraie, à savoir que tout module plat est projectif.

COROLLAIRE 2.9. *Pour tout A-module L, il existe une suite exacte*

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} L \longrightarrow 0$$

où les P_i sont des A-modules plats.

DÉMONSTRATION. En effet, toute résolution projective (IV.2.5) de L satisfait cette condition. □

Une suite exacte comme celle du corollaire s'appelle *résolution plate* de L. Nous laissons au lecteur le soin de formuler et de prouver les résultats portant sur la notion de platitude pour les modules à gauche. Nous achevons cette section avec la description de deux isomorphismes fonctoriels qui précisent encore les relations entre le produit tensoriel et le foncteur Hom.

PROPOSITION 2.10. *Soient A, B deux K-algèbres, P_A un A-module projectif de type fini, ${}_BM_A$ un bimodule et ${}_BN$ un B-module à gauche. Il existe un isomorphisme fonctoriel de K-modules*

$$P \otimes_A \mathrm{Hom}_B(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B\left(\mathrm{Hom}_A(P,M),N\right)$$

défini par

$$x \otimes f \mapsto (g \mapsto f(g(x)))$$

(où $x \in P$, $f \in \mathrm{Hom}_B(M,N)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(P,M)$).

DÉMONSTRATION. Il est trivial de vérifier que la correspondance de l'énoncé définit bien un morphisme φ de K-modules, fonctoriel en chaque variable. C'est un isomorphisme si $P_A = A_A$ puisqu'il est alors égal à la composition des isomorphismes $A \otimes_A \mathrm{Hom}_B(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B\left(\mathrm{Hom}_A(A,M),N\right)$. C'est donc encore un isomorphisme si $P_A = A_A^{(n)}$ (car les foncteurs donnés sont linéaires). Or tout A-module projectif de type fini P est un facteur direct d'un module libre de type fini. L'énoncé suit alors de la commutativité des foncteurs de l'éuoncé avec les sommes directes finies. □

PROPOSITION 2.11. *Soient A, B deux K-algèbres, P_A un A-module projectif de type fini, ${}_BM_A$ un bimodule et N_B un B-module à droite. Il existe un isomorphisme fonctoriel de K-modules*

$$N \otimes_B \mathrm{Hom}_A(P,M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A\left(P, N \otimes_B M\right)$$

défini par

$$y \otimes f \mapsto (x \mapsto y \otimes f(x))$$

(où $y \in N$, $f \in \mathrm{Hom}_A(P,M)$, $x \in P$).

DÉMONSTRATION. En tous points semblable à celle de (2.10) et laissée au lecteur. □

3. Les théorèmes de Watts.

Nous savons que les foncteurs produit tensoriel sont exacts à droite (par (2.2) et (2.4)) et préservent les sommes directes (par (1.5)). Nous montrerons que réciproquement ces propriétés suffisent à caractériser le produit tensoriel. En outre, au moyen de l'adjonction (2.1), nous obtiendrons des caractérisations analogues du foncteur Hom. Commençons par le lemme suivant qui est en fait un corollaire d'un résultat catégorique connu, le lemme de Yoneda (que nous ne prouverons pas ici).

LEMME 3.1. *Soient A une K-algèbre, M, N deux A-modules tels qu'il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\varphi : \mathrm{Hom}_A(M, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(N, -)$$

(ou encore $\mathrm{Hom}_A(-, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(-, N)$*). Alors* $M \xrightarrow{\sim} N$.

DÉMONSTRATION. On a un isomorphisme de K-modules

$$\varphi_N : \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(N, N).$$

Soit donc $f : M \to N$ tel que $\varphi_N(f) = 1_N$. On considère le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M, M) & \xrightarrow[\sim]{\varphi_M} & \mathrm{Hom}_A(N, M) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(M,f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(N,f)} \\ \mathrm{Hom}_A(M, N) & \xrightarrow[\sim]{\varphi_N} & \mathrm{Hom}_A(N, N) \end{array} .$$

Posons $g = \varphi_M\,(1_M)$. Alors on a

$$\begin{aligned} 1_N &= \varphi_N(f) = \varphi_N\,(f \cdot 1_M) = \varphi_N \, \mathrm{Hom}_A(M, f)\,(1_M) \\ &= \mathrm{Hom}_A(N, f)\varphi_M\,(1_M) = \mathrm{Hom}_A(N, f)(g) = fg. \end{aligned}$$

De même, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(N, N) & \xrightarrow[\sim]{\varphi_N^{-1}} & \mathrm{Hom}_A(M, N) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(N,g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(M,g)} \\ \mathrm{Hom}_A(N, M) & \xrightarrow[\sim]{\varphi_M^{-1}} & \mathrm{Hom}_A(M, M) \end{array}$$

donne

$$\begin{aligned} 1_M &= \varphi_M^{-1}(g) = \varphi_M^{-1} \, \mathrm{Hom}_A(N, g)\,(1_N) \\ &= \mathrm{Hom}_A(M, g)\varphi_N^{-1}\,(1_N) = \mathrm{Hom}_A(M, g)(f) = gf. \end{aligned}$$

Cela montre l'énoncé dans le cas covariant. Le cas contravariant se démontre de même. □

Nous prouvons maintenant la caractérisation promise des produits tensoriels. Le lecteur remarquera l'usage d'une présentation libre en tant qu'approximation (dans la première partie de la démonstration).

THÉORÈME 3.2. *Soient A, B deux K-algèbres et $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ un foncteur K-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F est exact à droite et préserve les sommes directes.*
(ii) *Il existe un bimodule ${}_AT_B$ tel que l'on a un isomorphisme fonctoriel $F \xrightarrow{\sim} - \otimes_A T_B$ (en outre, on peut choisir $T = F(A_A)$).*
(iii) *F admet un adjoint à droite.*

DÉMONSTRATION. (i) implique (ii). Posons en effet $T = F(A_A)$. Il faut faire de T un $(A-B)$-bimodule. Or le foncteur F induit un morphisme de K-algèbres $\varphi : A \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} A \to \operatorname{End} F(A)$ qui à son tour induit une structure de A-module à gauche sur le B-module $T_B = F(A)_B$ par

$$a \cdot t = \varphi(a)(t)$$

pour $a \in A$, $t \in T$. Comme, pour tout $a \in A$, $\varphi(a)$ est un endomorphisme de T_B, cela fait de T un $(A - B)$-bimodule. Or, si M est un A-module arbitraire, il existe, par (III.3.7), des ensembles Λ et Σ et une suite exacte de A-modules

$$A_A^{(\Lambda)} \longrightarrow A_A^{(\Sigma)} \longrightarrow M_A \longrightarrow 0.$$

Si on applique les foncteurs F et $- \otimes_A T_B$ à cette suite, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes de $\operatorname{Mod} B$

$$\begin{tikzcd} T_B^{(\Lambda)} \arrow[r] \arrow[d, "1_{T^{(\Lambda)}}"'] & T_B^{(\Sigma)} \arrow[r] \arrow[d, "1_{T^{(\Sigma)}}"'] & M \otimes_A T_B \arrow[r] & 0 \\ F(A)^{(\Lambda)} \arrow[r] & F(A)^{(\Sigma)} \arrow[r] & F(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

On en déduit l'existence d'un isomorphisme $M \otimes_A T_B \xrightarrow{\sim} F(M)$ dont on vérifie de suite la fonctorialité.

(ii) implique (iii). On pose $G = \operatorname{Hom}_B(T, -) : \operatorname{Mod} B \to \operatorname{Mod} A$ et on applique (2.1).

(iii) implique (i). Par (IV.1.6), F est exact à droite. Pour montrer que $F\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} FM_\lambda$, on note que, si $G : \operatorname{Mod} B \to \operatorname{Mod} A$ désigne l'adjoint à droite de F,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_B\left(F\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right), X\right) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, GX\right) \\ &\xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Hom}_A(M_\lambda, GX) \\ &\xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Hom}_A(FM_\lambda, X) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_B\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} FM_\lambda, X\right) \end{aligned}$$

pour tout X, où on a utilisé (III.2.9). Il suit alors de (3.1) que l'on a bien $F\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} FM_\lambda$. □

Par exemple, soient A une K-algèbre et I un idéal bilatère de A. On considère le foncteur $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod}(A/I)$ défini sur les objets par $F(M) = M/MI$, et de façon évidente sur les morphismes. Il est facile de voir que F est exact à droite et préserve les sommes directes. Il suit alors du théorème que F est isomorphe (en tant que foncteur) à $- \otimes_A F(A)_{A/I} = - \otimes_A (A/I)$, c'est-à-dire que pour tout A-module M, il existe un isomorphisme fonctoriel:

$$M/MI \xrightarrow{\sim} M \otimes_A A/I.$$

On a retrouvé ainsi les résultats de (2.6).

THÉORÈME 3.3. *Soient A, B deux K-algèbres et F : $\operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ un foncteur K-linéaire contravariant. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F est exact à gauche, et transforme les sommes directes en produits.*

(ii) *Il existe un $(A-B)$-bimodule T tel que $F \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(-, T)$. En outre, on peut choisir $T = F(A)$.*

DÉMONSTRATION. Comme il est clair que (ii) implique (i), montrons la réciproque, c'est-à-dire que (i) implique (ii). Commençons par donner une structure de A-module à gauche au B-module à droite $T = F(A)$. Le foncteur F induit un morphisme de K-algèbres $\varphi : A \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} A \to \operatorname{End} F(A)$ qui à son tour induit une structure de A-module à gauche sur le B-module $T = F(A)_B$ par

$$at = \varphi(a)(t)$$

pour $a \in A$ et $t \in T$. Comme $\varphi(a)$ est un endomorphisme de T_B, cela fait de T un $(A-B)$-bimodule. Or, si M est un A-module arbitraire, il existe par (III.3.7) des ensembles Λ et Σ et une suite exacte de A-modules

$$A_A^{(\Lambda)} \longrightarrow A_A^{(\Sigma)} \longrightarrow M_A \longrightarrow 0.$$

Si on applique les foncteurs F et $\operatorname{Hom}_A(-, T)$ à cette suite, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes de $\operatorname{Mod} B$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(M,T) & \longrightarrow & T_B^\Lambda & \longrightarrow & T_B^\Sigma \\
 & & & & \Big\downarrow 1_{T^\Lambda} & & \Big\downarrow 1_{T^\Sigma} \\
0 & \longrightarrow & F(M) & \longrightarrow & F(A)^\Lambda & \longrightarrow & F(A)^\Sigma
\end{array}.$$

On en déduit l'existence d'un isomorphisme $\operatorname{Hom}_A(M, T) \xrightarrow{\sim} F(M)$, dont on vérifie de suite la fonctorialité. □

Comme on le voit, la démonstration de ce second théorème de Watts est semblable à celle du premier. Le troisième (qui traite du foncteur Hom covariant) est un peu plus difficile.

THÉORÈME 3.4. *Soient A, B deux K-algèbres et F : $\operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ un foncteur K-linéaire covariant. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F est exact à gauche et préserve les produits.*
(ii) *$F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(T,-)$ pour un $(B-A)$-bimodule ${}_BT_A$.*
(iii) *F admet un adjoint à gauche.*

DÉMONSTRATION. (i) implique (ii). Soit I_A un cogénérateur injectif de $\mathrm{Mod}A$. On pose $J_A = I_A^{F(I)}$ (le produit de copies de I_A indexées par $F(I)$). Par hypothèse, $F(J) = F\left(I^{F(I)}\right) = F(I)^{F(I)}$. On prend l'élément

$$y = (x)_{x \in F(I)} \in F(J),$$

et on définit $\varphi : \mathrm{Hom}_A(J,I) \to F(I)$ par $f \mapsto F(f)(y)$ (pour $f \in \mathrm{Hom}_A(J,I)$). Alors φ est un épimorphisme: en effet, soient $x \in F(I)$ et $p_x : J \to I$ la $x^{\text{ème}}$ projection, alors $\varphi(p_x) = F(p_x)(y) = x$ puisque, F préservant les produits, $F(p_x) : F(J) \to F(I)$ est la $x^{\text{ème}}$ projection.

Nous voulons calculer le noyau de φ. Soit X un sous-module de J. Comme F est exact à gauche, $F(X)$ est un sous-module de $F(J)$, qui peut être identifié à l'image de $F(i) : F(X) \to F(J)$ avec $i : X \to J$ l'inclusion. On définit T comme étant l'intersection de tous les sous-modules X de J tels que $y \in F(X)$. Il est clair que T est un A-module avec $y \in F(T)$. Alors $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ si et seulement si $0 = \varphi(f) = F(f)(y)$ c'est-à-dire que $y \in \mathrm{Ker}\,F(f) = F(\mathrm{Ker}\,f)$, car F est exact à gauche. Par définition de T, cela donne $T \subseteq \mathrm{Ker}\,f$. Soit maintenant $j : T \to J$ l'inclusion. On a $f \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(j,I)$ si et seulement si $0 = \mathrm{Hom}_A(j,I)(f) = fj$, c'est-à-dire $T = \mathrm{Im}\,j \subseteq \mathrm{Ker}\,f$. La comparaison de ces deux résultats donne $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ si et seulement si $f \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(j,I)$ c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(j,I)$.

Comme I est un A-module injectif, l'application de $\mathrm{Hom}_A(-,I)$ à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{j} J \xrightarrow{p} J/T \longrightarrow 0$$

(où p est la projection canonique) donne une suite exacte courte qui est la ligne supérieure du diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(J/T,I) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(p,I)"] & \mathrm{Hom}_A(J,I) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(j,I)"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_A(T,I) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi_I"] & 0 \\
& & & F(I) \arrow[dr] & \\
& & & & 0
\end{tikzcd}$$

et on a montré plus haut que $\varphi = \mathrm{coker}\,\mathrm{Hom}_A(p,I)$. Donc il existe par (II.3.4) un unique isomorphisme ψ_I tel que $\varphi = \psi_I\,\mathrm{Hom}_A(j,I)$, c'est-à-dire que l'on a $\psi_I(f) = F(f)(y)$. Il est facile de voir que $\psi : \mathrm{Hom}_A(T,-) \to F$ défini pour M par $\psi_M : \mathrm{Hom}_A(T,M) \to F(M)$ donné par $\psi_M(f) = F(f)(y)$ est un morphisme fonctoriel.

Soit maintenant M_A un A-module arbitraire. Il existe, par (IV.3.10), des ensembles Λ, Σ et une suite exacte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^\Lambda \longrightarrow I^\Sigma.$$

Comme F et $\mathrm{Hom}_A(T,-)$ sont exacts à gauche, on en déduit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(T,M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(T,I)^\Lambda & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(T,I)^\Sigma \\
 & & \big\downarrow \psi_M & & \big\downarrow \psi_{I^\Lambda} & & \big\downarrow \psi_{I^\Sigma} \\
0 & \longrightarrow & FM & \longrightarrow & FI^\Lambda & \longrightarrow & FI^\Sigma
\end{array}\quad .$$

Comme ψ_{I^Λ} et ψ_{I^Σ} sont des isomorphismes, il en est de même de ψ_M. Il ne reste plus qu'à vérifier que T admet une structure canonique de $(B-A)$-bimodule. On considère l'identité $1_T \in \mathrm{End}\, T$. Comme $\psi_T : \mathrm{End}\, T \xrightarrow{\sim} FT$, et que FT est un B-module, on peut définir la multiplication de 1_T par $b \in B$:

$$1_T \cdot b = \psi_T\,(1_T) \cdot b$$

et on pose, pour $x \in T$,

$$bx = (1_T \cdot b)\,(x).$$

Cela donne bien une structure de B-module à gauche pour T, et on vérifie de suite que cette structure fait de T un $(B-A)$-bimodule.

(ii) implique (iii). En effet, on peut prendre pour adjoint à gauche le foncteur $G = - \otimes_B T_A : \mathrm{Mod}\, B \to \mathrm{Mod}\, A$.

(iii) implique (i). En effet, l'exactitude à gauche de F suit de (IV.1.6). Soit $G : \mathrm{Mod}\, B \to \mathrm{Mod}\, A$ un adjoint à gauche de F, alors, pour tout B-module X,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_B\left(X, F\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right)\right) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A\left(GX, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \\
&\xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_A\,(GX, M_\lambda) \\
&\xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_B\,(X, FM_\lambda) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B\left(X, \prod_{\lambda\in\Lambda} FM_\lambda\right)
\end{aligned}$$

par (III.2.8). Par (3.1), on en déduit que $F\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} FM_\lambda$. $\square$

4. Algèbre tensorielle, graduations.

On se propose, pour une K-algèbre A, d'associer à tout $(A-A)$-bimodule une K-algèbre, qui est aussi un $(A-A)$-bimodule et définie uniquement. Ce problème universel mène à la définition suivante.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. Pour un $(A-A)$-bimodule ${}_AM_A$, une *algèbre tensorielle* sur M est une paire $(T(M), j)$ où $T(M)$ est une K-algèbre et aussi un $(A-A)$-bimodule, et $j : M \to T(M)$ est un morphisme de $(A-A)$-bimodules tel que, si (B, f) est une paire formée d'une K-algèbre B qui est aussi un $(A-A)$-bimodule, et $f : M \to B$ est un morphisme de $(A-A)$-bimodules, alors il existe un unique $\overline{f} : T(M) \to B$ qui est un morphisme d'algèbres et de $(A-A)$-bimodules tel que $\overline{f}j = f$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & T(M) \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

THÉORÈME 4.1. *Soient A une K-algèbre et ${}_AM_A$ un $(A-A)$-bimodule. Il existe, à isomorphisme près, une unique algèbre tensorielle sur M.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer l'existence. On forme, par récurrence, le produit tensoriel de d copies de M avec lui-même sur A (ou *d-puissance tensorielle* de M):

$$M^{\otimes 0} = A, \text{ et}$$
$$M^{\otimes d} = M^{\otimes(d-1)} \otimes_A M \quad \text{pour } d \geq 1.$$

C'est à chaque fois un $(A-A)$-bimodule. Il suit de l'associativité du produit tensoriel (1.3)(ii) que l'on a, pour $d, e \geq 0$, un isomorphisme

$$M^{\otimes d} \otimes_A M^{\otimes e} \xrightarrow{\sim} M^{\otimes(d+e)}$$

défini par

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_d) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_e) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_d \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_e$$

(où $x_i \in M$ et $y_j \in M$ pour $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq e$). Cet isomorphisme permet de définir une multiplication sur la somme directe

$$T(M) = \bigoplus_{d \geq 0} M^{\otimes d}.$$

En effet, tout élément de $T(M)$ s'écrit uniquement sous la forme $t = \sum_{d \geq 0} t_d$, où $t_d \in M^{\otimes d}$ et $(t_d)_{d \geq 0}$ est à support fini. Ici, t_d est appelée la *composante homogène* de degré d. Si $s = \sum_{e \geq 0} s_e$, où $s_e \in M^{\otimes e}$ et $(s_e)_{e \geq 0}$ est à support fini, on définit

$$ts = \sum_{d,e \geq 0} t_d s_e$$

où le produit $t_d s_e$ est défini comme étant l'image de $t_d \otimes s_e \in M^{\otimes d} \otimes_A M^{\otimes e}$ dans $M^{\otimes(d+e)}$ au moyen de l'isomorphisme précédent. Donc la composante homogène de ts de degré n est égale à $\sum_{d=0}^{n} t_d s_{n-d}$. La vérification que ce produit fait de $T(M)$ une algèbre associative est immédiate. On prend pour $j : M \to T(M)$ l'inclusion qui identifie M à $M^{\otimes 1} \subseteq T(M)$.

Il reste à montrer que $(T(M), j)$ satisfait la propriété universelle. Soit donc (B, f) une paire comme dans la définition. On définit $f^{\otimes d} : M^{\otimes d} \to B$ pour $d \geq 1$ par

$$f^{\otimes d}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_d) = f(x_1) \cdots f(x_d).$$

Cela donne bien un morphisme de $(A-A)$-bimodules. Par la propriété universelle de la somme directe, on trouve un morphisme de $(A-A)$-bimodules $\overline{f} : T(M) \to B$. Ce dernier est aussi un morphisme de K-algèbres car si $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_d \in M^{\otimes d}$, $y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_e \in M^{\otimes e}$, alors $\overline{f}(x) = f(x_1) \cdots f(x_d)$ et $\overline{f}(y) = f(y_1) \cdots f(y_e)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \overline{f}(xy) &= \overline{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_d \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_e) \\ &= f(x_1) \cdots f(x_d) f(y_1) \cdots f(y_e) = \overline{f}(x)\overline{f}(y). \end{aligned}$$

Enfin, $\overline{f}$ est uuiquement déterminé par f car il coïncide avec ce dernier sur $M = M^{\otimes 1}$ et ce dernier engendre $T(M)$ en tant que K-algèbre. □

Si A est une K-algèbre commutative, on peut évidemment remplacer "$(A-A)$-bimodule" par "A-module" dans la définition et la construction précédentes. C'est en particulier le cas si $A = K$. Par la suite, nous considérerons surtout ce dernier cas. Par exemple, si $A = K$, X est un ensemble et $M = K^{(X)}$ (le module libre sur X), il suit de la construction précédente que $T(M)$ est isomorphe à l'algèbre libre $K\langle X \rangle$ sur X (voir (III.3.8)). Si $X = \{t\}$ n'a qu'un élément (c'est-à-dire, si $M = {}_K K_K$) on a donc $T(M) \xrightarrow{\sim} K[t]$.

Ce dernier exemple suggère un langage qui est parfois utile dans le contexte précédent. Soit $(A_d)_{d \in \mathbb{Z}}$ une famille de K-modules indexée par $\mathbb{Z}$. On identifie A_d à un sous-module de $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A_d$ au moyen de l'injection canonique.

DÉFINITION. Une K-algèbre A est dite *graduée de type* $\mathbb{Z}$ si le K-module sous-jacent A est égal à la somme directe $\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A_d$ d'une famille de sous-modules $(A_d)_{d \in \mathbb{Z}}$ telle que $A_d A_e \subseteq A_{d+e}$ pour tous $d, e \in \mathbb{Z}$. Un élément du sous-module A_d, considéré comme élément de A, est dit *homogène de degré d*.

EXEMPLES 4.2. (a) $A = K[t_1, \ldots, t_n]$ est une K-algèbre graduée: ici $A_d = 0$ pour $d < 0$ et si $d \geq 0$, alors A_d est le sous-module formé des polynômes homogènes de degré d. Si $n = 1$, $A = K[t]$ et $A_d = Kt^d$ pour $d \geq 0$.

(b) $T(M)$ est graduée par ses composantes homogènes $M^{\otimes d}$ (ici aussi, $M^{\otimes d} = 0$ pour $d < 0$).

(c) L'algèbre $K[t, t^{-1}]$ des polynômes de Laurent est un exemple d'algèbre gradnée à composantes non nulles pour tout $d \in \mathbb{Z}$.

(d) Le produit tensoriel de deux K-algèbres graduées (voir (1.8)) est encore une K-algèbre graduée: en effet, si $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} A_d$ et $B = \bigoplus_{e\in\mathbb{Z}} B_e$, alors $A \otimes_K B = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{e\in\mathbb{Z}} (A_d \otimes_K B_{e-d})$. Par exemple, c'est le cas pour $K[t] \otimes_K K[s] \xrightarrow{\sim} K[t,s]$.

LEMME 4.3. *Soit* $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} A_d$ *une algèbre graduée. Alors* A_0 *est une sous-algèbre de* A.

DÉMONSTRATION. On a d'abord $A_0A_0 \subseteq A_0$ par définition. Il faut montrer que $1 \in A_0$. Écrivons $1 = \sum_{d\in\mathbb{Z}} a_d$ avec $a_d \in A_d$. Supposons $x \in A_e$. Alors $x = x \cdot 1 = \sum_{d\in\mathbb{Z}} xa_d$. En comparant les composantes de degré e, on obtient $x = xa_0$. Par conséquent, $x = xa_0$ pour tout $x \in A$. En particulier, $1 = 1a_0 = a_0$. Donc A_0 est une sous-algèbre de A. $\square$

DÉFINITION. Soient $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} A_d$ une algèbre graduée, B une sous-algèbre et I un idéal bilatère de A. On dit que B est une *sous-algèbre graduée*, et que I est un *idéal gradué* de A si $B = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} (B \cap A_d)$ et $I = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} (I \cap A_d)$, respectivement.

Il revient au même de dire que si $x = \sum_{d\in\mathbb{Z}} x_d \in B$ (on $x = \sum x_d \in I$) avec $x_d \in A_d$ pour tout $d \in \mathbb{Z}$, alors on a $x_d \in B$ (ou $x_d \in I$, respectivement), pour tout $d \in \mathbb{Z}$.

Ces deux notions sont reliées comme d'ordinaire aux morphismes. Soient $A = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} A_d$ et $B = \bigoplus_{e\in\mathbb{Z}} B_e$ deux algèbres graduées. Un morphisme de K-algèbres $\varphi : A \to B$ tel que $\varphi(A_d) \subseteq B_d$ pour tout $d \in \mathbb{Z}$ est appelé un *morphisme d'algèbres graduées*. Nous laissons au lecteur la vérification facile que l'image d'un morphisme d'algèbres graduées est une sous-algèbre graduée et que son noyau est uu idéal gradué. Réciproquement, étant donnés une algèbre graduée A et un idéal gradué I de A, le quotient A/I est encore gradué et le morphisme canonique $A \to A/I$ est un morphisme d'algèbres graduées (on remarque en effet que $A/I = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} (A_d/(I \cap A_d))$). Enfin, observons que si X est une partie de A formée d'éléments homogènes, alors l'idéal bilatère engendré par X est gradué: en effet, tout élément de cet idéal s'écrit comme une somme de termes de la forme axb, chacun se trouvant dans l'idéal, avec $x \in X$ et $a, b \in A$ homogènes.

5. Algèbre extérieure, déterminants.

Nous allons définir une propriété universelle qui nous permettra non seulement d'enrichir notre banque d'exemples, mais aussi de retrouver des résultats classiques. Comme toujours, $K(= A)$ désigne un anneau commutatif.

DÉFINITION. Soit M un K-module. Une *algèbre extérieure* sur M est une paire $(\wedge M, j)$ où $\wedge M$ est une K-algèbre et $j : M \to \wedge M$ est un morphisme de K-modules tel que $j(x)^2 = 0$ pour tout $x \in M$, et telle que si (B, f) est nne paire avec B une K-algèbre et $f : M \to B$ un morphisme de K-modules tel que $f(x)^2 = 0$ pour tout $x \in M$, alors il existe un unique morphisme de K-algèbres $\overline{f} : \wedge M \to B$ tel que $\overline{f} j = f$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \wedge M \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

THÉORÈME 5.1. *Pour tout K-module M, il existe, à isomorphisme près, une unique K-algèbre extérieure sur M. C'est une K-algèbre graduée.*

DÉMONSTRATION. On prend $\wedge M = T(M)/J$, où J est l'idéal bilatère de $T(M)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes x$, où $x \in M$. De même, on prend j l'injection de M dans $\wedge M$ déduite de l'injection $M \to T(M)$, c'est-à-dire la composition de cette dernière avec l'application canonique $T(M) \to \wedge M$. L'idéal J étant engendré par des éléments homogènes de degré 2, il est gradué et donc $\wedge M$ est gradué par les sous-modules $\wedge^d M = M^{\otimes d}/(M^{\otimes d} \cap J)$. Le reste de l'énoncé est trivial. □

Par abus de langage, on appelle $\wedge M$ l'algèbre extérieure sur M.

On remarque que, pour des raisons de degré, on a $M^{\otimes 0} \cap J = 0$, $M^{\otimes 1} \cap J = 0$. On peut donc identifier K à $\wedge^0 M$ et M à $\wedge^1 M$. L'image dans $\wedge M$ de l'élément $x_1 \otimes \cdots \otimes x_d$ de $T(M)$ (où $x_i \in M$) est notée $x_1 \wedge \cdots \wedge x_d$ et appelée le *produit extérieur* des éléments $x_1, \ldots, x_d$. Un élément de $\wedge M$ est une somme finie d'éléments de cette forme.

De l'égalité $x \wedge x = 0$ pour tout $x \in M$, on déduit les égalités $0 = (x+y) \wedge (x+y) = x \wedge x + x \wedge y + y \wedge x + y \wedge y = x \wedge y + y \wedge x$ et donc $x \wedge y = -y \wedge x$ pour tous $x, y \in M$. Cette propriété est parfois appelée l'*anticommutativité* de l'algèbre extérieure.

On en déduit la remarque suivante qui nous sera utile dans l'étude des applications multilinéaires alternées. Soit $d \geq 1$ un entier. Le sous-module $M^{\otimes d} \cap J$ de $M^{\otimes d}$ est engendré par les éléments de la forme $x_1 \otimes \cdots \otimes x_d$ (où $x_i \in M$) tels qu'il existe un $1 \leq i < n$ avec $x_i = x_{i+1}$. Il est a fortiori engendré par les éléments $x_1 \otimes \cdots \otimes x_d$ tels que, pour deux indices i, j avec $i < j$, on a $x_i = x_j$: en effet, échangeant alors successivement x_j avec les x_k pour $i < k < j$ au moyen de l'anticommutativité, on voit que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_d = (-1)^{j+1-i} \cdots \wedge x_i \wedge x_j \wedge \cdots = 0$.

Pour le reste de cette section, on se concentre sur le cas où M est un K-module libre de base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (par exemple, M est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K). Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On considère le K-module libre $K^{(\mathcal{E})}$: notre objectif est de montrer qu'il est possible de définir une multiplication sur $K^{(\mathcal{E})}$ qui fait de ce module une K-algèbre isomorphe à l'algèbre extérieure $\wedge M$. Cela fournira une seconde construction de $\wedge M$ dans le cas où M est libre de type fini.

Par définition, le K-module libre $K^{(\mathcal{E})}$ admet pour base l'ensemble des éléments de la forme e_I, avec $I \in \mathcal{E}$. Afin de définir une multiplication sur $K^{(\mathcal{E})}$, on définira une multiplication sur ces vecteurs de base, que l'on prolongera ensuite par bilinéarité.

Soient donc $I, I' \in \mathcal{E}$. On suppose que $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ et $I' = \{j_1, \dots, j_q\}$ sont disjoints et que les éléments de ces ensembles sont ordonnés de sorte que $i_1 < \cdots < i_p$ et $j_1 < \cdots < j_q$. Si I et I' sont non vides, on note $i(I, I')$ le nombre de paires $(i_k, j_\ell) \in I \times I'$ telles que $j_\ell < i_k$: une telle paire s'appelle une *inversion*. Si I ou I' est vide, on conviendra de poser $i(I, I') = 0$. On définit alors le produit de deux éléments de base $e_I, e_{I'}$ (où $I, I' \in \mathcal{E}$) par

$$e_I e_{I'} = \begin{cases} 0 & I \cap I' \neq \emptyset \\ (-1)^{i(I,I')} e_{I \cup I'} & I \cap I' = \emptyset. \end{cases}$$

En particulier, on voit de suite que $e_\emptyset$ opère comme l'identité sur les vecteurs de base. On convient donc de noter $e_\emptyset = 1$. Montrons que le produit ainsi défini est associatif, c'est-à-dire que $e_I (e_{I'} e_{I''}) = (e_I e_{I'}) e_{I''}$ pour tous $I, I', I'' \in \mathcal{E}$. Cette égalité est évidemment vraie si les ensembles I, I', I'' ne sont pas disjoints car les deux termes de l'égalité sont nuls. Si par contre I, I' et I'' sont disjoints, on a que

$$\begin{aligned} e_I (e_{I'} e_{I''}) &= (-1)^{i(I',I'')} e_I e_{I' \cup I''} = (-1)^{i(I',I'') + i(I, I' \cup I'')} e_{I \cup I' \cup I''} \\ &= (-1)^{i(I',I'') + i(I,I') + i(I,I'')} e_{I \cup I' \cup I''} \end{aligned}$$

puisqu'il suit de la définition des inversions, et de ce que I, I', I'' sont disjoints, que $i(I, I' \cup I'') = i(I, I') + i(I, I'')$. De même, on vérifie que le terme de droite est égal à $(e_I e_{I'}) e_{I''}$.

Par bilinéarité, on définit le produit de deux éléments du K-module libre $K^{(\mathcal{E})}$ par

$$\left(\sum_{I \in \mathcal{E}} e_I \alpha_I\right) \left(\sum_{J \in \mathcal{E}} e_J \beta_J\right) = \sum_{I, J \in \mathcal{E}} e_I e_J \alpha_I \beta_J$$

(où α_I et β_J appartiennent à K pour tous $I, J \in \mathcal{E}$). Comme le produit d'éléments de la base est associatif, il en résulte que le K-module $A = K^{(\mathcal{E})}$ est muni d'une structure d'anneau associatif, d'identité $e_\emptyset = 1$, et en fait de K-algèbre, puisque l'application $\alpha \mapsto \alpha \cdot 1$ est un morphisme d'anneaux de K dans le centre de A (voir (I.1.1)).

Notons qu'il suit de la définition du produit dans A que si $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$, on a $e_I = e_{\{i_1\}} \cdots e_{\{i_p\}}$.

THÉORÈME 5.2. *Soit M un K-module libre de type fini. L'algèbre A construite ci-dessus est isomorphe à $\wedge M$.*

DÉMONSTRATION. On a évidemment un morphisme de K-modules $h : M \to A$ défini par $h\left(\sum_{i=1}^{n} e_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} e_{\{i\}} \alpha_i$ (où $\alpha_i \in K$). Nous allons montrer que la paire (A, h) satisfait la propriété universelle définissant $\wedge M$. Pour commencer, il suit de la définition du produit qne $h(e_i)^2 = e_{\{i\}} e_{\{i\}} = 0$ et par conséquent

$h(x)^2 = 0$ pour tout $x \in M$. Soient maintenant B une K-algèbre, et $f : M \to B$ un morphisme de K-modules tel que $f(x)^2 = 0$. On doit montrer qu'il existe un unique morphisme de K-algèbres $\overline{f} : A \to B$ tel que $\overline{f}h = f$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Or, si $\overline{f}$ est un morphisme de K-algèbres tel que $\overline{f}h = f$, on doit avoir $\overline{f}(e_\emptyset) = 1$, tandis que, si $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$, alors $e_I = e_{\{i_1\}} \cdots e_{\{i_p\}} = h(e_{i_1}) \cdots h(e_{i_p})$ entraîne que $\overline{f}(e_I) = f(e_{i_1}) \cdots f(e_{i_p})$. Cela assure l'unicité de $\overline{f}$. Afin de montrer son existence, on prouvera que l'application $\overline{f}$ ainsi définie est un morphisme de K-algèbres. Il suffit pour cela de montrer que $\overline{f}$ préserve les produits, et, par linéarité, il suffit de montrer que, pour tous $I, I' \in \mathcal{E}$ on a $\overline{f}(e_I e_{I'}) = \overline{f}(e_I)\overline{f}(e_{I'})$.

Cette égalité est vérifiée si $I \cap I' \neq \emptyset$ car alors $e_I e_{I'} = 0$ donc $\overline{f}(e_I e_{I'}) = 0$ et le terme de droite $\overline{f}(e_I)\overline{f}(e_{I'})$ s'annule aussi, car si $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $I' = \{j_1, \dots, j_q\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$, $j_1 < \cdots < j_q$ et $i_k = j_\ell$ on voit que dans l'expression $f(e_{i_1}) \cdots f(e_{i_p}) f(e_{j_1}) \cdots f(e_{j_q})$ on peut ramener (avec un éventuel changement de signe) les termes $f(e_{i_k})$ et $f(e_{j_\ell})$ côte à côte de sorte que leur produit s'annule: $f(e_{i_k}) f(e_{j_\ell}) = f(e_{i_k})^2 = 0$.

Supposons donc $I \cap I' = \emptyset$. Afin de prouver notre résultat, on procédera par récurrence sur $\operatorname{card} I'$. Si $I' = \{j\}$, $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_{m-1} < j < i_m < \cdots < i_p$, le nombre d'inversions $i(I, I')$ est égal à $p - m$ de sorte que $e_I e_{I'} = (-1)^{p-m} e_{I \cup I'}$ et

$$\begin{aligned} \overline{f}(e_I e_{I'}) &= (-1)^{p-m} f(e_{i_1}) \cdots f(e_{i_{m-1}}) f(e_j) f(e_{i_m}) \cdots f(e_{i_p}) \\ &= f(e_{i_1}) \cdots f(e_{i_{m-1}}) f(e_{i_m}) \cdots f(e_{i_p}) f(e_j) \\ &= \overline{f}(e_I)\overline{f}(e_{I'}). \end{aligned}$$

Si $\operatorname{card} I' > 1$, soit j le plus petit élément de I', et posons $I'' = I' \setminus \{j\}$. Il suit de l'hypothèse de récurrence que

$$\begin{aligned} \overline{f}(e_I e_{I'}) &= \overline{f}(e_I e_{\{j\}} e_{I''}) = \overline{f}(e_{I\cup\{j\}} e_{I''}) = \overline{f}(e_{I\cup\{j\}})\overline{f}(e_{I''}) \\ &= \overline{f}(e_I)\overline{f}(e_{\{j\}})\overline{f}(e_{I''}) = \overline{f}(e_I)\overline{f}(e_{\{j\}\cup I''}) = \overline{f}(e_I)\overline{f}(e_{I'}). \quad \square \end{aligned}$$

COROLLAIRE 5.3. *Soit M un K-module libre de base finie $\{e_1, \dots, e_n\}$. L'algèbre extérieure $\wedge M$ est libre de type fini en tant que K-module, et une base en est fournie par l'ensemble des éléments de la forme $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$, où $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$ parcourt l'ensemble des parties $\mathcal{E}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ (avec la convention que $e_\emptyset = 1$).*

DÉMONSTRATION. On a prouvé l'existence d'un isomorphisme de K-algèbres $h : A \to \wedge M$ tel que $j = gh$. Cet isomorphisme transporte la base $(e_I)_{I \in \mathcal{E}}$ du K-module libre $A = K^{(\mathcal{E})}$ sur la base ci-dessus du K-module $\wedge M$. $\square$

COROLLAIRE 5.4. *Soient K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension n. Alors* $\dim_K \wedge E = 2^n$. $\square$

Soient maintenant M, N deux K-modules et $m \geq 1$ un entier. Une application $f : M^m \to N$ sera dite *multilinéaire* si elle est linéaire en chaque variable, c'est-à-dire si, pour tout $1 \leq i \leq m$,

$$f(x_1, \ldots, x_i\alpha + x_i'\beta, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)\,\alpha + f(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_m)\,\beta$$

où $\alpha, \beta \in K$ et $x_1, \ldots, x_i, x_i', \ldots, x_m \in M$. Il suit de la définition du produit tensoriel $M^{\otimes m} = M \otimes_K \cdots \otimes_K M$ qu'il existe une bijection entre applications K-linéaires $M^{\otimes m} \to N$ et applications multilinéaires $M^m \to N$ donnée par $\varphi : g \mapsto gj_m$, où $j_m : M^m \to M^{\otimes m}$ est l'application canonique $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$.

Une application multilinéaire $f : M^m \to N$ sera dite *alternée* si $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ pour tout $(x_1, \ldots, x_m) \in M^m$ tel que $x_i = x_j$ pour $i \neq j$. On notera $\mathrm{Alt}(M^m, N)$ le sous-module du K-module des applications multilinéaires de M^m dans N formé des applications multilinéaires alternées. Notons que, si f est multilinéaire alternée, on a

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_m) &+ f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_m) \\ &= f(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_m) = 0 \end{aligned}$$

pour $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_m \in M$.

Soit J l'idéal de $T(M)$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes x$ pour $x \in M$, et soit $f : M^m \to N$ nne application multilinéaire. On sait qu'il existe une application K-linéaire $g : M^{\otimes m} \to N$ telle que $f = gj_m$. Dire que f est alternée revient alors à dire que $g(J \cap M^{\otimes m}) = 0$. Cette reformulation de la définition fournit la clé de la proposition suivante.

PROPOSITION 5.5. *Soit* $k_m : M^m \to M^{\otimes m} \to \wedge^m M$ *donnée par*

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$$

pour $(x_1, \ldots, x_m) \in M^m$. *C'est une application multilinéaire alternée et la correspondance* $g \mapsto gk_m$ *définit un isomorphisme de K-modules* $\mathrm{Hom}_K(\wedge^m M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}(M^m, N)$ *pour tout* N.

DÉMONSTRATION. Le premier énoncé est trivial. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}_K(-, N)$ à la snite exacte de K-modules

$$0 \longrightarrow J \cap M^{\otimes m} \longrightarrow M^{\otimes m} \xrightarrow{p_m} \wedge^m M \longrightarrow 0$$

et on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_K(\wedge^m M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_K(p_m, N)} \mathrm{Hom}_K(M^{\otimes m}, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(J \cap M^{\otimes m}, N).$$

On sait d'autre part qu'il existe un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_K(M^{\otimes m}, N)$ et le K-module des applications multilinéaires $M^m \to N$ donné par $g \mapsto gj_m$. Or, une application K-linéaire $g : M^{\otimes m} \to N$ induit une application K-linéaire $\wedge^m M \to N$ si et seulement si g se factorise par p_m, ce qui est le cas si et seulement si $g(J \cap M^{\otimes m}) = 0$. On a vu que cela revient à dire que gj_m est alternée. Nous avons montré que l'image par l'isomorphisme précédent du sous-module $\mathrm{Hom}_K(\wedge^m M, N)$ est égale à l'ensemble des applications multilinéaires alternées $\mathrm{Alt}(M^m, N)$. Comme $k_m = p_m j_m$, la correspondance est bien celle de l'énoncé. □

Soit M un K-module libre de base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Il résulte de (5.3) que, pour tout entier m, $\wedge^m M$ est un K-module libre ayant une base formée de $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ éléments. En particulier, le K-module libre $\wedge^n M$ admet une base réduite au seul élément $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Par conséquent, si $x_1, \ldots, x_n \in M$, il existe $\alpha \in K$ tel que

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\,\alpha.$$

DÉFINITION. L'élément $\alpha \in K$ défini par l'équation précédente s'appelle le *déterminant* des n éléments $x_1, \ldots, x_n$ par rapport à la base $e_1, \ldots, e_n$. On le note $\det(x_1, \ldots, x_n)$.

LEMME 5.6. *L'application de M^n dans K, définie par*

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det(x_1, \ldots, x_n)$$

est l'unique application multilinéaire alternée prenant la valeur 1 en l'élément $(e_1, \ldots, e_n) \in M^n$.

DÉMONSTRATION. Il est clair que cette application satisfait ces conditions. C'est la seule car $\mathrm{Alt}(M^n, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(\wedge^n M, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(K, K) \xrightarrow{\sim} K$ par (5.5) et le fait que $\wedge^n M \xrightarrow{\sim} K$. □

Soient M, N deux A-modules et $f : M \to N$ une application K-linéaire. Pour tout entier $m \geq 1$, l'application $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_m)$ de M^m dans $\wedge^m N$ est évidemment une application multilinéaire alternée. Par (5.5), il existe une unique application K-linéaire $g : \wedge^m M \to \wedge^m N$ telle que

$$g(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) = f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_m).$$

Cette application g est notée $\wedge^m f$ et appelée la $m^{\text{ième}}$ *puissance extérieure* de f. Elle est donc telle que

$$(\wedge^m f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) = f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_m)$$

pour $x_1, \ldots, x_m \in M$.

Supposons en particulier que $N = M$ est un K-module libre ayant une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Si $f : M \to M$ est K-linéaire, la $n^{\text{ième}}$ puissance extérieure $\wedge^n f$ est donc une application K-linéaire $\wedge^n M \to \wedge^n M$. Comme $\wedge^n M$ a une base réduite au seul élément $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, on a que $\wedge^n f$ correspond à un endomorphisme du K-module K_K, donc est un scalaire.

DÉFINITION. Soit M un K-module libre de base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Le *déterminant* $\det(f)$ *d'une application K-linéaire* $f : M \to M$ est un scalaire tel que, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in M$, on a $f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_n) = (x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)\det(f)$.

On en déduit la définition de déterminant d'une matrice. En effet, soit $[\alpha_{ij}]$ une $n \times n$ matrice à coefficients dans K. Il lui correspond une application K-linéaire $f : K^n \to K^n$ par

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} e_j \alpha_{ji}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de K^n. On définit le déterminant $\det[\alpha_{ij}]$ de la matrice $[\alpha_{ij}]$ comme étant celui de l'application f.

PROPOSITION 5.7. (i) $\det(1_M) = 1$.
(ii) *Si* $f, g : M \to M$ *sont* K*-linéaires,* $\det(gf) = \det(g)\det(f)$.
(iii) *Si* $\alpha \in K$ *et* $f : M \to M$ *est* K*-linéaire,* $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$.

DÉMONSTRATION. (i) est triviale, (ii) suit de

$$\begin{aligned}
(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)\det(gf) &= (gf)(x_1) \wedge \cdots \wedge (gf)(x_n) \\
&= g\,[f(x_1)] \wedge \cdots \wedge g\,[f(x_n)] \\
&= [f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_n)]\det(g) \\
&= (x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)\det(f)\det(g)
\end{aligned}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in M$. (iii) se démontre de même. □

On retrouve la définition classique de déterminant. Notons encore $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonique de M et $[\alpha_{ij}]$ la matrice de $f : M \to M$ par rapport à cette base. On a donc, par multilinéarité,

$$\begin{aligned}
(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\det(f) &= f(e_1) \wedge \cdots \wedge f(e_n) \\
&= \left(\sum_{i_1=1}^{n} e_{i_1}\alpha_{i_1 1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_n=1}^{n} e_{i_n}\alpha_{i_n n}\right) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{n} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n})\,\alpha_{i_1 1} \cdots \alpha_{i_n n}.
\end{aligned}$$

Comme il suit de l'alternance que la somme porte sur les $n!$ permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\det(f) = (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1} \cdots \alpha_{\sigma(n),n}$$

où $\mathcal{S}_n$ désigne le groupe symétrique sur $\{1, 2, \dots, n\}$ et $\operatorname{sgn}(\sigma)$ la signature de la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On a bien la définition classique

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma(1),1} \cdots \alpha_{\sigma(n),n}.$$

On en déduit par exemple pour σ^{-1}, comme $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$,

$$\begin{aligned}
\det(f) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{1,\sigma(1)} \cdots \alpha_{n,\sigma(n)} \\
&= \det(Df)
\end{aligned}$$

où $Df : \mathrm{Hom}_K(M, K) \to \mathrm{Hom}_K(M, K)$ désigne l'application transposée de f (c'est-à-dire, $Df = \mathrm{Hom}_K(f, K)$): en effet, on sait que la matrice de Df dans la base duale de $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la transposée de la matrice $[\alpha_{ij}]$ de f).

PROPOSITION 5.8. *Soient K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $x_1, \ldots, x_m \in M$. Les vecteurs $x_1, \ldots, x_m$ sont linéairement indépendants si et seulement si $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \neq 0$. Si en outre $m = n$, ces conditions équivalent à* $\det(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$, *où ce déterminant est pris par rapport à une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E.*

DÉMONSTRATION. Supposons $x_1, \ldots, x_m$ linéairement indépendants. Il existe une base $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ de E. Le fait que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \neq 0$ suit alors de (5.3). Réciproquement, supposons que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \neq 0$. Si $x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m = 0$ avec les α_i dans K, on a $0 = (x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m) \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m = (x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m)\alpha_1$ et donc $\alpha_1 = 0$. De même $\alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. Enfin, si $m = n$, il suit de la définition même de déterminant de $x_1, \ldots, x_n$ que $\det(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ si et seulement si $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \neq 0$. $\square$

Exercices du Chapitre V.

1. Soient $\{e_1, e_2\}$ et $\{f_1, f_2, f_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. Trouver les coordonnées de $x \otimes y$, où $x = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$ et $y = \left[\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right]$ dans la base $\{e_i \otimes f_j\}$ de $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.

2. Montrer que

(i) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$.
(ii) $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{(m,n)}$, où (m, n) est le pgcd des entiers m et n.
(iii) $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$, pour tout groupe abélien fini G.

3. (Complexification d'un espace vectoriel réel). Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace. On pose $E^c = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Comparer une base de E à une base de E^c. Montrer que, si E^c est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace, alors E est (fonctoriellement) isomorphe à un sous-espace de E^c.

4. Montrer qu'il peut y avoir, dans un produit $L \otimes_A M$, un élément qui ne peut se mettre sous la forme d'un produit unique $x \otimes y$, quels que soient $x \in L$, $y \in M$ (prendre $A = K$, $L = M = K^2$).

5. Montrer que $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[i] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$.

6. Soient K un corps, et $K(a)$ une extension de K engendrée par un élément a de polynôme minimal f sur K. Si K' est une extension arbitraire de K, montrer que $K' \otimes_K K(a) \xrightarrow{\sim} K'[t]/\langle f \rangle$.

7. Soit M un K-module. Montrer que les éléments du K-module $M \otimes_K K[t]$ peuvent se mettre sous la forme de polynômes en t à coefficients dans M.

8. Soient A une K-algèbre, L_A et ${}_AM$ des modules. Montrer que l'on a un isomorphisme fonctoriel $L \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M \otimes_{A^{\mathrm{op}}} L$.

9. Soit A une K-algèbre. Montrer que l'application $A \to A \otimes_K B$ définie par $a \mapsto a \otimes 1$ (pour $a \in A$) est un morphisme d'algèbres.

10. Montrer qu'il existe, ponr un A-module à droite M et une famille $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de A-modules à gauche, une application fonctorielle

$$M \otimes_A \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \right) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} (M \otimes_A N_\lambda)$$

qui n'est généralement pas un isomorphisme (prendre $N_\lambda = \mathbb{Z}_{2^\lambda}$, $\Lambda = \mathbb{N}$ et $M = \mathbb{Q}$).

11. Montrer que, pour le monomorphisme $j : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$, le morphisme induit $j \otimes 1 : \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ est nul.

12. Prouver (2.2) et (2.4) directement (sans utiliser (IV.1.6)).

13. Soient A une K-algèbre et

$$0 \longrightarrow L'_A \xrightarrow{f} L_A \xrightarrow{g} L''_A \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow {}_AM' \xrightarrow{u} {}_AM \xrightarrow{v} {}_AM'' \longrightarrow 0$$

deux suites exactes de A-modules à droite et à gauche, respectivement. Montrer que $g \otimes v : L \otimes_A M \to L'' \otimes_A M''$ est un épimorphisme de noyau $\operatorname{Im}(f \otimes 1_M) + \operatorname{Im}(1_L \otimes u)$.

14. Soient A une K-algèbre, I un idéal à droite de A, et J un idéal à gauche de A. Montrer que l'on a un isomorphisme de K-modules $A/I \otimes_A A/J \xrightarrow{\sim} A/(I+J)$.

15. Soient L, M deux K-modules. Trouver un morphisme $L \otimes_{\mathbb{Z}} M \to L \otimes_K M$. Si $K = \mathbb{Q}$, montrer que c'est un isomorphisme.

16. Soient L, M, N trois K-modules. Montrer que

$$\operatorname{Hom}_K(L, \operatorname{Hom}_K(M, N)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_K(M, \operatorname{Hom}_K(L, N)).$$

17. Soient L, M deux K-modules et $DL = \operatorname{Hom}_K(L, K)$ le dual de L. On définit $\varphi : DL \otimes_K M \to \operatorname{Hom}_K(L, M)$ par $\varphi(f \otimes x)(y) = xf(y)$ (pour $f \in DL$, $x \in M$, $y \in L$).

(i) Montrer que φ est un morphisme de K-modules.
(ii) Montrer que φ est un isomorphisme si L (ou M) égale K^n (où n est un entier).

18. Soient L, M deux K-modules, $DL = \operatorname{Hom}_K(L, K)$ et $DM = \operatorname{Hom}_K(M, K)$ leurs duals. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes abéliens $\varphi : DL \otimes_K DM \to D(L \otimes_K M)$ tel que

$$\varphi(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$$

(pour $f \in DL$, $g \in DM$, $x \in L$, $y \in M$). Si K est un corps et L, M sont de dimension finie, montrer que φ est un isomorphisme.

19. Soient A une K-algèbre commutative, P et P' deux A-modules projectifs. Montrer que $P \otimes_A P'$ est projectif.

20. Si P_A est un A-module projectif et B une K-algèbre qui est aussi un A-module à gauche, montrer que $P \otimes_A B$ est un B-module projectif.

21. Soient I_A un A-module injectif et B une K-algèbre qui est aussi un A-module à droite. Montrer que $\operatorname{Hom}_A({}_BB_A, I_A)$ est un B-module injectif.

22. Soient M_A un A-module, L_A un A-module libre et $f : L \to M$ un épimorphisme. Montrer que M est plat si et seulement si, pour tout idéal à gauche I de type fini de A, on a

$$LI \cap \operatorname{Ker} f = (\operatorname{Ker} f)I.$$

En déduire qu'un $\mathbb{Z}$-module M est plat si et seulement si, pour $x \in M$, $n \in \mathbb{Z}$, on a que $nx = 0$ implique $x = 0$ (comme on l'a vu à l'exercice (IV.16), on dit alors que M est sans torsion).

23. On considère l'extension triviale $\Lambda = A \ltimes M$ d'une K-algèbre A par un $(A-A)$-bimodule M, c'est-à-dire l'algèbre de K-module sous-jacent $A \oplus M$ avec la multiplication définie par

$$(a, x)(a', x') = (aa', ax' + xa')$$

(pour $a, a' \in A$, $x, x' \in M$) (voir l'exercice (I.15)). On définit une catégorie $\mathcal{M}(\Lambda)$ comme suit: les objets sont les paires (X, φ), où X est un A-module et $\varphi : X \otimes_A M \to X$ est A-linéaire et tel que $\varphi(\varphi \otimes 1_M) = 0$. Un morphisme $(X, \varphi) \to (X', \varphi')$ est une application A-linéaire $f : X_A \to X'_A$ telle que $\varphi'(f \otimes 1_M) = f\varphi$. Montrer que l'on a une équivalence de catégories $\mathcal{M}(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod} \Lambda$.

24. On considère deux K-algèbres A, B, un bimodule ${}_BM_A$ et l'algèbre triangulaire de matrices $\Lambda = \left[\begin{smallmatrix} A & 0 \\ M & B \end{smallmatrix}\right]$ munie de l'addition des matrices et de la multiplication induite de la structure de bimodule de M. On définit une catégorie $\mathcal{M}(\Lambda)$ comme suit: les objets sont les triplets (X, Y, φ) où X est un A-module, Y un B-module et $\varphi : Y \otimes_B M \to X$ est A-linéaire. Un morphisme $(X, Y, \varphi) \to (X', Y', \varphi')$ est une paire (f, g) où $f : X_A \to X'_A$ est A-linéaire, $g : Y_B \to Y'_B$ est B-linéaire et $\varphi'(g \otimes 1_M) = f\varphi$.

(i) Montrer que si (X, Y, φ) est un objet de $\mathcal{M}(\Lambda)$, alors $X \oplus Y$ devient un Λ-module par

$$(x, y)\begin{bmatrix} a & 0 \\ m & b \end{bmatrix} = (xa + \varphi(y \otimes m), yb)$$

(où $x \in X$, $y \in Y$, $a \in A$, $m \in M$, $b \in B$).

(ii) En déduire que l'on a une équivalence de catégories $\mathcal{M}(\Lambda) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Mod} \Lambda$.

25. Montrer le théorème suivant qui suit des résultats de Watts: pour deux algèbres A, B, un foncteur $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ est une équivalence si et seulement s'il existe des bimodules ${}_AU_B$ et ${}_BV_A$ tels que l'on a des isomorphismes de bimodules ${}_AU \otimes_B V_A \xrightarrow{\sim} A$ et ${}_BV \otimes_A U_B \xrightarrow{\sim} B$ et un isomorphisme fonctoriel $F \xrightarrow{\sim} - \otimes_A U$

26. Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme de K-algèbres, de sorte que l'on a des structures de bimodules ${}_BB_A$ et ${}_AB_B$. On fait d'un B-module M_B un A-module par $ma = m\varphi(a)$ (pour $m \in M$, $a \in A$). Cela donne un foncteur $F : \operatorname{Mod} B \to \operatorname{Mod} A$. Montrer que

$$\operatorname{Hom}_B({}_AB_B, -) \xrightarrow{\sim} F \xrightarrow{\sim} - \otimes_B B_A$$

et que

$$F \circ (- \otimes_A B_B) \xrightarrow{\sim} F \circ \operatorname{Hom}_A({}_BB_A, -) \xrightarrow{\sim} 1_{\operatorname{Mod} A}.$$

27. Soit $A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d$ une algèbre graduée. Montrer que $A_+ = \bigoplus_{d \geq 1} A_d$ est un idéal gradné.

28. Soient $N \subseteq M$ deux K-modules. Montrer que $T(M/N)$ est isomorphe au quotient de $T(M)$ par l'idéal bilatère engendré par l'image de N par l'application canoniqne $M \to T(M)$.

29. Même exercice que le précédent pour l'algèbre extérieure.

30. Définir un foncteur "algèbre tensorielle" de la catégorie des K-modules dans celle des K-algèbres.

31. Soient M, N deux $(A-A)$-bimodules. Montrer que $T(M \oplus N) \xrightarrow{\sim} T(M) \otimes_A T(N)$.

32. Soit M un K-modnle de type fini ayant n générateurs. Montrer que $\wedge M$ est un K-module de type fini et qu'en outre $\wedge^m M = 0$ pour $m > n$.

33. Soient y un vecteur et $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une base de K^n. Montrer que les solutions α_i de l'équation vectorielle $\sum x_i \alpha_i = y$ sont données par

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)\alpha_i = x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge y \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_n.$$

En déduire la règle de Cramer.

34. Soit E un K-espace vectoriel de base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Si $x_1, \ldots, x_n \in E$ sont tels que $\sum x_i \wedge e_i = 0$, montrer que $x_i = \sum e_j \alpha_{ji}$ avec $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

35. Soit M un K-module. L'algèbre symétrique sur M est la donnée d'une paire $(S(M), s)$ où $S(M)$ est une K-algèbre commutative et $s : M \to S(M)$ est K-linéaire et telle que, si (B, f) est une paire avec B une K-algèbre commutative et $f : M \to B$ est une application K-linéaire, il existe un unique morphisme de K-algèbres $\overline{f} : S(M) \to B$ tel que $\overline{f}s = f$.

(i) Montrer que pour tout K-module M, il existe une unique algèbre symétriqne $S(M)$ à isomorphisme près.
(ii) Montrer que $S(M)$ a une structure naturelle d'algèbre graduée.
(iii) Soit M le K-module libre de base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Montrer que

$$S(M) \xrightarrow{\sim} K[t_1, t_2, \ldots, t_n].$$

CHAPITRE VI

Conditions de finitude. Modules simples et semisimples.

Soit A une K-algèbre. Afin de décrire efficacement les A-modules et les morphismes entre eux, il est naturel d'essayer d'imposer des conditions permettant de se limiter à une situation plus simple. Dans ce chapitre, on posera des conditions sur le treillis de sous-modules d'un module donné. Par exemple, on supposera que le treillis en question est tel que tout ensemble non vide d'éléments admet un élément maximal, ou minimal. On dit alors que le module est noethérien, ou artinien respectivement. Il se fait que si l'on suppose une de ces conditions satisfaite par le module A_A, alors elle l'est par tout A-module de type fini. Il est donc naturel d'étudier les propriétés des modules noethériens et artiniens de type fini. La coïncidence de ces deux conditions nous donnera notre premier théorème de structure: le théorème de Jordan-Hölder. On s'intéresse ensuite aux modules non nuls n'ayant pas de sous-modules propres: un tel module est dit simple, et on obtient une caractérisation complète des algèbres ayant la propriété que tout A-module est somme directe de A-modules simples. Ce dernier résultat, connu sous le nom de théorème de Wedderburn-Artin, est d'une importance primordiale: il montre en effet comment la structure d'une algèbre peut être décrite au moyen de propriétés de la catégorie de modules.

1. Modules artiniens et noethériens.

DÉFINITION. Soient A une K-algèbre et M un A-module.

(a) M est dit *artinien* si tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément minimal.
(b) M est dit *noethérien* si tout ensemble non vide de sous-modules de M admet un élément maximal.

Avant de donner des exemples, nous donnons des conditions équivalentes.

LEMME 1.1. *Soient A une K-algèbre et M un A-module.*

(a) *M est artinien si et seulement si, pour toute suite de sous-modules de M de la forme $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $M_j = M_i$ pour tout $j > i$ (on dit alors que la suite* devient stationnaire*).*

(b) *M est noethérien si et seulement si, pour toute suite de sous-modules de M de la forme $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $M_j = M_i$ pour tout $j > i$ (on dit alors que la suite* devient stationnaire*).*

DÉMONSTRATION. On donnera seulement la démonstration dn cas noethérien (b), celle du cas artinien s'obtenant en inversant les inclusions.

Supposons M noethérien, et soit $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ une suite de sous-modules de M. Cette suite définit un ensemble non vide $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-modules de M, donc doit contenir un élément maximal M_i (disons). Mais alors $M_j = M_i$ pour tout $j > i$.

Réciproquement, supposons la condition donnée satisfaite et que $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide de sous-modules de M sans élément maximal. Soit $M_0 \in \mathcal{E}$. Comme M_0 n'est pas maximal, il existe un sous-module $M_1 \in \mathcal{E}$ tel que $M_0 \subsetneq M_1$. Par récurrence, on construit une suite $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots$, ce qui contredit l'hypothèse que la condition donnée est satisfaite. □

Cela nous mène à nos premiers exemples. Tout espace vectoriel de dimension finie est évidemment artinien et noethérien. On considère d'autre part le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$: tout sous-module est de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un entier a, et $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$ si et seulement si b divise a; comme tont entier a un nombre fini de diviseurs mais un nombre infini de multiples, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ est noethérien mais pas artinien.

Ce même raisonnement montre en fait que tout domaine d'intégrité principal (comme l'algèbre de polynômes $K[t]$ sur un corps K) est noethérien.

Les conditions du lemme sont appelées les *conditions de chaînes*. Ainsi, M est artinien (ou noethérien) si et seulement si toute chaîne décroissante (ou croissante) devient stationnaire: on dit que M satisfait la *condition des chaînes décroissantes* (ou *croissantes*, respectivement).

Supposons que le A-module M est artinien (ou noethérien), il est naturel de se demander s'il en est de même de tont sous-module ou de tout quotient de M. Réciproqnement, les conditions de chaîne sont-elles préservées par les extensions? Afin de répondre à ces questions, nous aurons besoin d'un lemme.

LEMME 1.2. *Soient L et $M' \subseteq M''$ trois sous-modules d'un A-module M. Il existe une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \frac{M''\cap L}{M'\cap L} \longrightarrow \frac{M''}{M'} \longrightarrow \frac{M''+L}{M'+L} \longrightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION. Il suit du théorème d'isomorphisme (II.4.3) que l'on a des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow M'\cap L \xrightarrow{j'} M' \longrightarrow (M'+L)/L \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow M''\cap L \xrightarrow{j''} M'' \longrightarrow (M''+L)/L \longrightarrow 0$$

où j' et j'' sont les inclusions canoniques. D'autre part, l'inclusion canonique $M' \to M''$ se restreiut à l'inclusion $M'\cap L \to M''\cap L$ et donc induit par passage aux conoyaux le morphisme $(M'+L)/L \to (M''+L)/L$ défini par $x'+y+L \longmapsto x'+y+L$ (où $x' \in M'$, $y \in L$) dont on voit de suite qu'il est injectif. On en déduit, par le lemme des 3×3 (voir (II.3.7)), l'existence d'un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \cap L \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & (M'+L)/L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'' \cap L \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & (M''+L)/L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dfrac{M'' \cap L}{M' \cap L} \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{M''}{M'} \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{M''+L}{M'+L} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}. \square$$

THÉORÈME 1.3. *Soit* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de* A*-modules.*

(a) M *est un module artinien si et seulement si* L *et* N *le sont.*
(b) M *est un module noethérien si et seulement si* L *et* N *le sont.*

DÉMONSTRATION. La nécessité suit évidemment de ce que tout sous-module de L est un sous-module de M, et tout sous-module de $N = M/L$ est un sous-module de M contenant L.

La suffisance sera prouvée dans le cas artinien, la démonstration du cas noethérien étant analogue. Soit donc $M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq \cdots$ une suite décroissante infinie. On a une suite décroissante

$$M_0 \cap L \supseteq M_1 \cap L \supseteq M_2 \cap L \supseteq \cdots$$

de sous-modules de L, et une suite décroissante

$$(M_0 + L)/L \supseteq (M_1 + L)/L \supseteq (M_2 + L)/L \supseteq \cdots$$

de sous-modules de $M/L \xrightarrow{\sim} N$. Il suit de (1.2) qu'au moins une de ces deux suites est infinie. Cela montre que, si L et N sont artiniens, M l'est aussi. $\square$

COROLLAIRE 1.4. *Soit* $\{M_1, \ldots, M_m\}$ *une famille finie de* A*-modules.*

(a) *Chaque* M_i *est artinien si et seulement si* $\bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ *est artinien.*
(b) *Chaque* M_i *est noethérien si et seulement si* $\bigoplus_{i=1}^{m} M_i$ *est noethérien.*

DÉMONSTRATION. Pour la nécessité dans le cas $m = 2$, cela suit du théorème et de la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{[0\ 1]} M_2 \longrightarrow 0.$$

Pour $m > 2$, on utilise la récurrence et la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow (M_1 \oplus \cdots \oplus M_{m-1}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} M_i \longrightarrow M_m \longrightarrow 0.$$

Quant à la suffisance, elle suit de la récurrence et de la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j \neq i} M_j \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} M_j \longrightarrow M_i \longrightarrow 0. \quad \square$$

Le critère (très utile) suivant montre que les modules noethériens sont reliés de très près aux modules de type fini.

THÉORÈME 1.5. *Un A-module M est noethérien si et seulement si tout sous-module de M est de type fini.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. Soient M noethérien et N un sous-module de M. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-modules de N de type fini. Alors $\mathcal{E} \neq \emptyset$, puisque le sous-module nul 0 est dans $\mathcal{E}$. Comme M est noethérien, $\mathcal{E}$ admet un élément maximal N_0. Supposons $N_0 \neq N$ et soit $x \in N \setminus N_0$. Le sous-module $N_1 = N_0 + xA$ est somme de deux sous-modules de N de type fini, donc est lui-même un sous-module de N de type fini, c'est-à-dire $N_1 \in \mathcal{E}$. Mais d'autre part N_1 contient proprement N_0 et cela contredit la maximalité de ce dernier. On a donc prouvé que $N_0 = N$. Par conséquent, N est de type fini.

Suffisance. Supposons que tout sous-module de M est de type fini et soit $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ une suite croissante de sous-modules de M. Posons $N = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$. Alors N est un sous-module de M. Par hypothèse, N est de type fini, c'est-à-dire qu'il existe des éléments $x_1, \ldots, x_m \in M$ tels que $N = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle$. Pour chaque $1 \leq j \leq m$, il existe $i_j \in \mathbb{N}$ tel que $x_j \in M_{i_j}$. Posons $i_0 = \max\{i_1, \ldots, i_m\}$. Alors $x_j \in M_{i_0}$ pour tout $1 \leq j \leq m$ et par conséquent $N \subseteq M_{i_0}$. Comme d'autre part on a $M_{i_0} \subseteq N$, on en déduit que $N = M_{i_0}$. En particulier $M_i = M_{i_0}$ pour tout $i \geq i_0$. On a montré que toute suite croissante de sous-modules de M devient stationnaire. $\square$

Il suit directement du théorème que tout module noethérien est de type fini.

2. Algèbres artiniennes et noethériennes.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre.

(a) A est dite *artinienne à droite* si A_A est un A-module artinien.
(b) A est dite *noethérienne à droite* si A_A est un A-module noethérien.

On formule de même les définitions d'algèbre artinienne à gauche et uoethérienne à gauche. Par exemple, $\mathbb{Z}$ est une algèbre noethérienne (à droite et à gauche, étant commutative) mais pas artinienne, ainsi qu'on l'a vu dans la section précédente. Tout quotient d'uue algèbre noethérienne ou artiuienne à droite (ou à gauche) l'est aussi. Tout anneau ($\mathbb{Z}$-algèbre) principal (par exemple $\mathbb{Z}_n$) est noethérien. Toute algèbre de dimension finie sur un corps est artinienne et noethérienne à droite et à gauche. L'algèbre des matrices

$$\begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{Q} \right\}$$

est artinienne et noethérienne à gauche, mais ni artinienne ni noethérienne à droite. Nous montrerons plus loin un théorème important, dit théorème de Hopkins-Levitski, disant que toute algèbre artinienne à droite est aussi noethérienne à droite. Enfin, le théorème suivant permet de construire plusieurs exemples d'algèbres noethériennes. Remarquons qu'il suit de (1.5) qu'une algèbre A est noethérienne à droite si et seulement si tout idéal à droite de A est de type fini.

THÉORÈME 2.1 (THÉORÈME DE LA BASE D'HILBERT). *Soit A une K-algèbre noethérienne à droite. L'algèbre des polynômes $A[t]$ est aussi noethérienne à droite.*

DÉMONSTRATION. Soit I un idéal à droite de $A[t]$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'ensemble des $a \in A$ tels qu'il existe un polynôme de I ayant at^n comme terme de plus haut degré. Il est clair que I_n est un idéal à droite de A, et que $I_n \subseteq I_{n+1}$ pour tout n. La suite croissante $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots$ devient stationnaire, puisque A est noethérienne à droite. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = I_{n_0}$ pour tout $n > n_0$. Pour chaque $i \leq n_0$, l'idéal à droite I_i est de type fini: il existe donc une famille finie $\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im_i}\}$ d'éléments de A qui engendre I_i. Pour chaque paire (i, j), avec $i \leq n_0$ et $1 \leq j \leq m_i$, soit p_{ij} un polynôme de I ayant $a_{ij}t^i$ comme terme de plus haut degré. Nous affirmous que l'ensemble fini $\{p_{ij} \mid 0 \leq i \leq n_0,\ 1 \leq j \leq m_i\}$ engendre I, ce qui prouvera l'énoncé.

Supposons que ce ne soit pas le cas et qu'il existe des polynômes de I qui ne peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des p_{ij}. On choisit un tel polynôme de plus petit degré qu'on note p. Soit bt^d le terme de plus haut degré de p, de sorte que $p(t) = bt^d + \cdots$. Comme $p \in I$, on a $b \in I_d$. Si $d \leq n_0$, ou peut écrire $b = \sum_{j=1}^{m_d} a_{dj}b_j$ pour des $b_j \in A$ et alors le polynôme

$$q(t) = p(t) - \sum_{j=1}^{m_d} p_{dj}(t)b_j$$

est un élément de I de degré $< d$. Il suit de la minimalité du degré de p que q est combiuaison linéaire des p_{ij}. Mais alors il eu est de même de p, une contradiction. Si $d > n_0$, on peut écrire $b = \sum_{j=1}^{m_{n_0}} a_{n_0 j}b_j$ pour des $b_j \in A$ et alors le polynôme

$$q(t) = p(t) - \sum_{j=1}^{m_{n_0}} p_{n_0 j}(t)t^{d-n_0}b_j$$

est un élément de I de degré $< d$. Le même raisonnement que plus haut conduit encore à une contradiction. □

COROLLAIRE 2.2. *Soit K un corps. Alors $K[t_1, \dots, t_n]$ est une K-algèbre noethérienne.*

DÉMONSTRATION. Cela suit directement du théorème et de la récurrence puisque $K[t_1, \dots, t_n] = K[t_1, \dots, t_{n-1}][t_n]$. □

Dans ce qui suit, quand nous dirons artinien (ou noethérien) sans plus préciser, nous voudrons toujours dire artinien (ou noethérien, respectivement) à droite. Le théorème suivant montre que sur une algèbre artinienne (ou noethérienne), il est toujours possible de construire des modules artiniens (ou noethériens, respectivement).

THÉORÈME 2.3. *Soit A une K-algèbre.*

(a) *Si A est artinienne, tout A-module à droite de type fini est artinien.*
(b) *Si A est noethérienne, tout A-module à droite de type fini est noethérien.*

DÉMONSTRATION. On fera la démonstration du cas noethérien, celle du cas artinien étant aualogue.

Soit M_A un A-module à droite de type fini. On procède par récurrence sur le nombre de générateurs de M. Si $M = xA$ est cyclique, alors il existe un idéal à droite I_A de A tel que $M_A \xrightarrow{\sim} A_A/I$ (voir (II.4.2)). Il suit alors de (1.3) que M est noethérieu. Si $M = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ avec $m \geq 2$, posous $N = \langle x_1, \dots, x_{m-1} \rangle$. Alors $M/N = \langle x_m + N \rangle$ est cyclique et on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0.$$

Comme N est noethérien par l'hypothèse de récurrence, et M/N est noethérien par le cas $m = 1$ traité plus haut, il ne reste qu'à appliquer (1.3) □

COROLLAIRE 2.4. *Une K-algèbre A est noethérienne si et seulement si pour tout A-module M de type fini, tout sous-module de M est aussi de type fini.*

DÉMONSTRATION. En effet, supposons A noethérienne. Il suit du théorème que tout A-module de type fini est noethérien. L'énoucé suit alors de (1.5). Réciproquement, supposons la propriété donnée satisfaite. Si on applique cette propriété au module cyclique A_A, on voit que tout idéal à droite de A est de type fiui. Par (1.5) encore, A est noethérienue. □

On rappelle qu'une famille de modules injectifs a un produit injectif (IV.3.2). Si l'algèbre est noethérienne, la somme directe est aussi injective.

COROLLAIRE 2.5. *Soient A une K-algèbre noethérienne et $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de A-modules injectifs. Alors $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ est injectif.*

DÉMONSTRATION. On applique le critère de Baer (IV.3.4): soit I_A un idéal à droite de A, on considère le diagramme à ligne exacte où j est l'inclusion et f est A-linéaire:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I_A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & A \\ & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda & \end{tikzcd}$$

Comme A est noethérienne, il suit du corollaire précédent (ou de (1.5)) que I_A est de type fini, disons $I_A = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, on a $f(x_i) \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_i} I_\lambda$, où Λ_i est une partie finie de Λ. Soit $\bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subseteq \Lambda$. Alors $f(I) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{m} I_{\lambda_i}$. Comme $\bigoplus_{i=1}^{m} I_{\lambda_i} = \prod_{i=1}^{m} I_{\lambda_i}$ et le produit de modules injectifs est injectif (IV.3.2), l'énoncé s'ensuit. □

Notre objectif présent est le suivant. Nous savons déjà que sur toute K-algèbre A, tout module projectif est plat. Nous allons prouver que sur une algèbre noethérienne A, une réciproque partielle est valide, à savoir que tout A-module plat de type fini est projectif. Pour cela, nous aurons besoin de quelques lemmes.

LEMME 2.6. *Soient A une K-algèbre noethérienne, et M_A un A-module de type fini. Il existe $m, n > 0$ et une suite exacte de la forme*

$$A_A^{(m)} \longrightarrow A_A^{(n)} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION. En effet, M étant de type fini, il existe, par (III.3.6), un entier $n > 0$ et un épimorphisme $p : A_A^{(n)} \to M$. Comme $N = \operatorname{Ker} p$ est un sous-module du module (libre) de type fini $A_A^{(n)}$, il suit de (2.4) que N est aussi de type fiui. Donc il existe un entier $m > 0$ et un épimorphisme $p' : A_A^{(m)} \to N$. On a montré l'existence d'une suite exacte

$$A_A^{(m)} \xrightarrow{q} A_A^{(n)} \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

où q est la composition de p' et de l'inclusion $N \to A_A^{(n)}$. □

Comme on l'a vu en (III.3) une suite exacte comme celle du lemme s'appelle une présentation (libre) finie. Le lemme précédent s'exprime en disant que sur une algèbre noethérienne, tout A-module de type fini est de présentation finie.

LEMME 2.7. *Soient A, B deux K-algèbres, avec A noethérienne et soient L_A, ${}_BM_A$, ${}_BI$ trois modules, avec L_A de type fini et ${}_BI$ injectif. Alors il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\varphi_L : L \otimes_A \operatorname{Hom}_B(M, I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_B(\operatorname{Hom}_A(L, M), I)$$

défini par

$$x \otimes f \mapsto (g \mapsto f(g(x)))$$

(où $x \in L$, $f \in \mathrm{Hom}_A(M,I)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$).

DÉMONSTRATION. Il suit de (2.6) qu'il existe deux entiers $m, n > 0$ et une suite exacte

$$A_A^{(m)} \longrightarrow A_A^{(n)} \longrightarrow L_A \longrightarrow 0.$$

Comme le produit tensoriel est exact à droite, on en déduit une suite exacte

$$A^{(m)} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,I) \longrightarrow A^{(n)} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,I) \longrightarrow L \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,I) \longrightarrow 0.$$

D'autre part, le foncteur exact à gauche $\mathrm{Hom}_A(-,M)$ donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^{(n)},M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A^{(m)},M).$$

Comme ${}_BI$ est injectif, $\mathrm{Hom}_B(-,I)$ est exact, d'où une suite exacte

$$\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(A^{(m)},M),I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(A^{(n)},M),I) \longrightarrow \\ \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(L,M),I) \longrightarrow 0.$$

On en déduit un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
A^{(m)} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,I) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{A^{(m)}}"', "\wr"] & A^{(n)} \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,I) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{A^{(n)}}"', "\wr"] & L \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,I) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_L"'] & 0 \\
\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(A^{(m)},M),I) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(A^{(n)},M),I) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(L,M),I) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\varphi_{A^{(m)}}$, $\varphi_{A^{(n)}}$ et φ_L sont les morphismes fonctoriels donnés. Or il suit de (V.2.10) et du fait que tout module libre est projectif que $\varphi_{A^{(m)}}$ et $\varphi_{A^{(n)}}$ sont des isomorphismes. Par conséquent, φ_L est aussi un isomorphisme par le lemme des 5 (voir (II.3.5)). □

THÉORÈME 2.8. *Soit A une K-algèbre noethérienne. Tout A-module plat de type fini est projectif.*

DÉMONSTRATION. Soit P un A-module plat de type fini. Il faut montrer que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(P,-)$ est exact à droite. Soit donc $M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ un épimorphisme, on doit prouver que le morphisme induit $\mathrm{Hom}_A(P,M) \to \mathrm{Hom}_A(P,N)$ est aussi un épimorphisme. On considère M et N comme des $(\mathbb{Z}-A)$-bimodules. Il suffit, d'après (IV.3.11), de montrer que pour un cogénérateur injectif I de $\mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}$ (par exemple $I = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$), la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_A(P,N),I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_A(P,M),I)$$

est exacte. Or, d'après (2.7), on a un diagramme commutatif avec les flèches verticales des isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_A(P,N),I) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_A(P,M),I) \arrow[d, "\wr"] \\
0 \arrow[r] & P \otimes_A \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,I) \arrow[r] & P \otimes_A \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,I)
\end{tikzcd} .$$

La ligne du bas est exacte, parce que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,I)$ est exact (puisque ${}_{\mathbb{Z}}I$ est injectif) ainsi que $P \otimes_A -$ (puisque P_A est plat). Par conséquent la ligne du hant est aussi exacte, ce qui démontre l'énoncé. □

Notons que l'énoncé n'est pas vrai si le module en question n'est pas de type fini. En effet, le lecteur pourra démontrer à titre d'exercice qu'un $\mathbb{Z}$-module est plat si et seulement s'il est sans torsion (c'est-à-dire si pour tout $x \in M$ et tout entier $n \neq 0$, on a que $nx = 0$ implique $x = 0$) (voir l'exercice (V.22)). En particulier, $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module plat, mais il n'est pas projectif (en effet, tout $\mathbb{Z}$-module projectif est libre, et $\mathbb{Q}$ n'a évidemment pas de base, voir l'exercice (III.28)). Remarquons que $\mathbb{Z}$ est une algèbre noethérienne.

Nous terminons cette section sur un exemple d'algèbre non noethérienne. Soit K un corps, l'algèbre $A = K[t_1, t_2, \ldots]$ de polynômes en une infinité dénombrable d'indéterminées $t_1, t_2, \ldots$ n'est pas noethérienne: en effet, le module A_A est cyclique (donc de type fini), mais l'idéal $I = \langle t_1, t_2, \ldots \rangle$ engendré par les indéterminées en est un sous-module qui n'est évidemment pas de type fini. La même algèbre fournit un exemple de module de type fini qui n'est pas de présentation finie (voir (2.6)). En effet, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \xrightarrow{p} A/I \longrightarrow 0$$

et A/I est cyclique (car image d'un module cyclique) et donc de type fini. Si A/I est de présentation finie, il existe une suite exacte

$$L_1 \xrightarrow{f_1} L_0 \xrightarrow{f_0} A/I \longrightarrow 0$$

avec L_0, L_1 libres de type fini. Alors $M = \operatorname{Im} f_1$ est de type fini et on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L_0 \xrightarrow{f_0} A/I \longrightarrow 0.$$

Le lemme dn serpent (II.3.6) donne un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & I \arrow[r, "1"] \arrow[d] & I \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & E \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & L_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & A/I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

avec E le produit fibré de p, f_0. Comme L_0 et A sont libres, la ligne et la colonne du milieu scindent, de sorte que l'on a $E \xrightarrow{\sim} A \oplus M$ et $E \xrightarrow{\sim} L_0 \oplus I$. Le premier isomorphisme entraîne que E_A est de type fini (puisque A et M le sont) et le second que I_A l'est aussi (car I est facteur direct de E), et c'est une contradiction. Donc, A/I n'est pas de présentation finie. Le lecteur aura reconnu que l'on a prouvé et appliqué dans un cas particulier le lemme de Schanuel (exercice (IV.12)).

3. Décomposition en blocs.

Dans cette section, nous montrons comment une K-algèbre artinienne ou noethérienne A se décompose en produit d'algèbres indécomposables (c'est-à-dire qui ne peuvent être à leur tour décomposées en produit d'algèbres) de sorte que l'étude de la catégorie $\operatorname{Mod} A$ se ramène à l'étude de catégories plus petites. La notion de produit d'algèbres a déjà été introduite en (I.1.2). Bornons-nous à la rappeler: soient $A_1, \ldots, A_t$ des K-algèbres, le K-module $A = \prod_{i=1}^{t} A_i$ acquiert naturellement une structure de K-algèbre si on définit la multiplication par

$$(a_1, a_2, \ldots, a_t)(b_1, b_2, \ldots, b_t) = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_tb_t)$$

où $a_i, b_i \in A$ pour $1 \leq i \leq t$.

Observons que chaque A_i peut être considéré comme un idéal bilatère de A au moyen de l'injection canonique $a_i \mapsto (0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots, 0)$. Si on identifie A_i à son image, on voit que $A_iA_j = 0$ si $i \neq j$ et $A_i^2 \subseteq A_i$ (ce qui exprime le fait que la multiplication s'opère par composantes). Notre propos est de caractériser autrement cette situation. Notons c_i l'image de l'identité de A_i par l'injection canonique $A_i \to A$. Il est clair que l'identité 1 de A s'écrit comme suit:

$$1 = c_1 + c_2 + \cdots + c_t.$$

Nous allons caractériser les c_i.

DÉFINITION. Un élément $e \in A$ est appelé un *idempotent* si $e^2 = e$. Un idempotent e est dit *central* si e appartient au centre $Z(A)$ de A. Deux idempotents e et f sont dits *orthogonaux* si $ef = fe = 0$.

Par exemple, dans toute algèbre, 0 et 1 sont des idempotents centraux. Si $e \in A$ est un idempotent, $1 - e$ est aussi un idempotent, et est central si e l'est. En outre, $1 - e$ et e sont orthogonaux. La somme $e + f$ de deux idempotents orthogonaux e et f est un idempotent, qui est central si e et f le sont. Dans l'algèbre de matrices $M_n(K)$, les matrices $\mathbf{e}_{ii}$ ayant 1 en position (i, i) et zéro partout ailleurs sont des idempotents deux à deux orthogonaux (et, si $n > 1$, non centraux). Dans $\mathbb{Z}_{12}$, les éléments $\bar{4}$ et $\bar{9}$ sont des idempotents orthogonaux (et évidemment centraux, puisque $\mathbb{Z}_{12}$ est commutative).

LEMME 3.1. *Soient $A_1, \ldots, A_t$ des algèbres, $A = \prod_{i=1}^{t} A_i$ et $1 = c_1 + c_2 + \cdots + c_t$ une décomposition de l'identité de A avec $c_i \in A_i$. Alors les c_i forment un ensemble d'idempotents centraux deux à deux orthogonaux. En outre, c_i est l'identité de A_i.*

DÉMONSTRATION. On identifie A_i à un idéal de A. Pour tout $a_i \in A_i$, on a

$$a_i = a_i \cdot 1 = a_i \left(\sum_{j=1}^{t} c_j \right) = \sum_{j=1}^{t} a_i c_j.$$

Comme $a_ic_j \in A_iA_j$, on en déduit que $a_ic_j = 0$ pour $i \neq j$ et donc $a_i = a_ic_i$ pour tout i. De même $c_ia_i = a_i$ pour tout i. Cela montre que c_i est l'identité de A_i, que les c_i sont des idempotents deux à deux orthogonaux (on prend $a_i = c_i$ dans $a_ic_j = 0$ pour $i \neq j$ et $a_ic_i = a_i$). Pour montrer que c_i est central, soit $a = \sum_{j=1}^{t} a_j \in A$ avec $a_j \in A_j$ on a

$$ac_i = \left(\sum_{j=1}^{t} a_j\right) c_i = \sum_{j=1}^{t}(a_jc_i) = a_ic_i = c_ia_i = c_i \left(\sum_{j=1}^{t} a_j\right) = c_ia. \quad \square$$

Il se fait que, réciproquement, les propriétés établies suffisent à caractériser la décomposition d'une algèbre en produit.

THÉORÈME 3.2. *Soient A une K-algèbre, et une décomposition de l'identité de A de la forme $1 = c_1+c_2+\cdots+c_t$ où les c_i forment un ensemble d'idempotents centraux et deux à deux orthogonaux. Pour chaque $1 \leq i \leq t$, on a que $A_i = c_iA$ est un idéal bilatère de A et $A \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{t} A_i$.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que le fait que c_i soit central implique que c_iA est un idéal bilatère. Il reste à montrer que $A \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{t} A_i$. Mais on voit de suite que $a \mapsto (c_1a, c_2a, \ldots, c_ta)$ (pour $a \in A$) et $(a_1, a_2, \ldots, a_t) \mapsto a_1 + a_2 + \cdots + a_t$ (où $a_i \in A_i$ pour $1 \leq i \leq t$) sont des morphismes d'algèbres, inverses l'un de l'autre. $\square$

Par exemple, dans $\mathbb{Z}_{12}$, on a $\bar{1} = \bar{4} + \bar{9}$ donc $\mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\sim} \bar{4}\mathbb{Z}_{12} \times \bar{9}\mathbb{Z}_{12}$ en tant que $\mathbb{Z}$-algèbres. Or $\bar{4}\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ et $\bar{9}\mathbb{Z}_{12} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$: uotons que $\bar{4}$ est l'identité de $\bar{4}\mathbb{Z}_{12}$ et $\bar{9}$ celle de $\bar{9}\mathbb{Z}_{12}$. Enfin, $\bar{4}\mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_3$ et $\bar{9}\mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_4$ de sorte que l'on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres $\mathbb{Z}_{12} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

On a montré qu'il existe une bijection entre décompositions d'une algèbre en produit d'algèbres, et décompositions de son identité en somme d'idempotents centraux deux à deux orthogonaux.

Une première conséquence est que l'on peut utiliser cette bijection pour caractériser les algèbres qui ne peuvent se décomposer en produit d'algèbres.

DÉFINITION. (a) Une K-algèbre non triviale A est dite *connexe* (ou *indécomposable en produit*), si $A = A_1 \times A_2$, avec A_1, A_2 des K-algèbres, implique $A_1 = 0$ ou $A_2 = 0$.

(b) Un idempotent central $c \neq 0$ est dit *centralement primitif* si $c = c_1 + c_2$ avec c_1, c_2 idempotents centraux orthogonaux implique $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$.

On a alors une conséquence évidente du théorème (3.2).

COROLLAIRE 3.3. *Une K-algèbre A est connexe si et seulement si 1 est un idempotent centralement primitif.* $\square$

Soit A une K-algèbre, une décomposition de l'identité $1 = c_1 + c_2 + \cdots + c_t$ en somme d'idempotents centraux deux à deux orthogonaux ayant la propriété que le nombre t de termes de cette somme est maximal a nécessairement chaque terme c_i centralement primitif (et donc chaque algèbre c_iA est connexe). Nous allons montrer qu'une telle décomposition existe si A est une algèbre artinienne ou noethérienne.

THÉORÈME 3.4. *Soit A une K-algèbre artinienne ou noethérienne. Alors A est isomorphe à un produit fini d'algèbres connexes uniquement déterminées.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord A noethérienne. Si A est connexe, il n'y a rien à prouver. Sinon, on considère la famille des idéaux bilatères propres I de A tels qu'il existe un idéal J satisfaisant $A = I \times J$. Comme A est noethérienne, cette famille admet un élément maximal A_1'. Posons $A = A_1 \times A_1'$. Si A_1' est lui-même connexe, on a fini. Sinon écrivons $A_1' = A_2 \times A_2'$, où A_2' est maximal parmi les idéaux bilatères strictement contenus dans A_1'. Par récurrence, on arrive à une décomposition

$$A = A_1 \times \cdots \times A_t \times A_t'.$$

Comme A est noethérienne, la suite croissante d'idéaux bilatères $(A_1 \times \cdots \times A_i)_{i \geq 1}$ doit devenir stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe un $t \geq 1$ tel que $A_t' = 0$. Chaque A_i étant connexe, on a ainsi la décomposition voulue de A.

Cela montre l'existence dans le cas noethérien. Le cas artinien se traite en choisissant à chaque étape A_i minimal non nul: alors les A_i' forment une suite décroissante qui doit aussi devenir stationnaire.

Quant à l'unicité de la décomposition, supposons

$$A = A_1 \times \cdots \times A_t = B_1 \times \cdots \times B_s$$

avec les A_i, B_j des K-algèbres connexes. Alors on a

$$A_i = A_iA = A_i(B_1 \times \cdots \times B_s) = (A_iB_1) \times \cdots \times (A_iB_s).$$

Comme A_i est connexe, il existe $1 \leq j \leq s$ tel que $A_i = A_iB_j$ et $A_iB_k = 0$ pour $k \neq j$. Mais on a aussi

$$B_j = AB_j = (A_1 \times \cdots \times A_t)B_j = (A_1B_j) \times \cdots \times (A_tB_j)$$

avec B_j connexe. Par conséquent, $B_j = A_iB_j = A_i$. On en déduit que

$$\prod_{\ell \neq i} A_\ell \xrightarrow{\sim} A/A_i = A/B_j \xrightarrow{\sim} \prod_{k \neq j} B_j$$

et on achève par récurrence. □

Si par exemple A est une algèbre de dimension finie sur un corps K, le théorème s'applique et on obtient que A est isomorphe à un produit fini d'algèbres connexes uniquement déterminées.

Si A est une K-algèbre noethérienne ou artinienne, et $A \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{t} A_i$ avec les A_i connexes, chaque A_i est appelé un *bloc* de A. Le théorème (3.4) est souvent appelé *théorème de la décomposition en blocs.*

L'iutérêt principal du théorème (3.4) est qu'il permet de ramener l'étude de la catégorie $\operatorname{Mod} A$ à l'étude des catégories $\operatorname{Mod} A_i$ avec A_i bloc de A. Si on s'intéresse à l'étude des catégories de modules, on peut donc toujours supposer que l'on a une algèbre connexe.

DÉFINITION. Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories. On définit leur *produit* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ comme étant la catégorie dont les objets sont les paires (X, M) avec X un objet de $\mathcal{C}$ et M un objet de $\mathcal{D}$, les morphismes de (X, M) dans (Y, N) sont les paires (f, u) avec $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$, et $u : M \to N$ un morphisme de $\mathcal{D}$, la composition des morphismes est définie par composantes.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ est en effet uue catégorie et qu'elle est K-liuéaire (ou K-abélienne) si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont K-linéaires (ou K-abéliennes, respectivement). En outre, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sout K-linéaires, on a des foncteurs d'inclusion $\mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ définis respectivement par $X \mapsto (X, 0)$ et $M \mapsto (0, M)$ et des foncteurs de projection $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ définis respectivement par $(X, M) \mapsto X$ et $(X, M) \mapsto M$.

Avec ce langage, la proposition suivante affirme que, si $A = A_1 \times A_2$, alors la donuée d'un A-module équivaut à la donnée d'une paire formée d'un A_1-module et d'un A_2-module.

PROPOSITION 3.5. *Soient A une K-algèbre et $A = A_1 \times A_2$ une décomposition de A, alors on a une équivalence de catégories* $\operatorname{Mod} A \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Mod} A_1) \times (\operatorname{Mod} A_2)$.

DÉMONSTRATION. Soit en effet $1 = c_1 + c_2$ la décomposition de l'identité de A en somme d'idempotents centraux orthogonaux, associée à la décomposition $A = A_1 \times A_2$. Soit M un A-module. Il est clair que, pour $i = 1, 2$, $Mc_i = \{xc_i \mid x \in M\}$ est un A_i-module. On a donc un foncteur $\operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} A_1 \times \operatorname{Mod} A_2$ donné par $M \mapsto (Mc_1, Mc_2)$: si en effet $f : M \to N$ est un morphisme de $\operatorname{Mod} A$, on a $f(xc_i) = f(x)c_i$ (pour $x \in M$) donc la restriction de f à Mc_i est un morphisme de $\operatorname{Mod} A_i$.

Réciproquement, soit (M_1, M_2) un objet de $\operatorname{Mod} A_1 \times \operatorname{Mod} A_2$. Alors $M = M_1 \times M_2$ devient un A-module si on définit le produit par composantes:

$$(x_1, x_2)(a_1, a_2) = (x_1 a_1, x_2 a_2)$$

où $x_i \in M_i$, $a_i \in A_i$ pour $i = 1, 2$. Si la paire $(f_1, f_2) : (M_1, M_2) \to (N_1, N_2)$ est un morphisme de $\operatorname{Mod} A_1 \times \operatorname{Mod} A_2$, on définit un morphisme $f : M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$ de $\operatorname{Mod} A$ par $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ où $x_i \in M_i$ pour $i = 1, 2$. Cela définit un foncteur $\operatorname{Mod} A_1 \times \operatorname{Mod} A_2 \to \operatorname{Mod} A$ dont on vérifie de suite qu'il est inverse du précédent. $\square$

Nous achevons sur une application.

THÉORÈME 3.6. *Soient A une algèbre, $I_1, \ldots, I_t$ des idéaux bilatères, $A_i = A/I_i$ et $f : A \to \prod_{i=1}^{t} A_i$ le morphisme défini par $a \mapsto (a + I_i)_{1 \leq i \leq t}$ (pour $a \in A$). Alors:*

(a) *f est injectif si et seulement si $\bigcap_{i=1}^{t} I_i = 0$.*
(b) *f est surjectif si et seulement si pour tous $i \neq j$, on a $I_i + I_j = A$ (les idéaux I_i et I_j sont alors dits* comaximaux, *ou* étrangers*).*

DÉMONSTRATION. (a) Il est clair que $\operatorname{Ker} f = \bigcap_{i=1}^{t} I_i$.

(b) Supposons f surjective et $i \neq j$. Il existe $a_i \in A$ tel que $a_i \in I_i$ et $1-a_i \in I_j$ (c'est-à-dire $a_i \equiv 0 \mod I_i$ et $a_i \equiv 1 \mod I_j$). Alors $1 = a_i + (1 - a_i) \in I_i + I_j$ et donc $A = I_i + I_j$.

Réciproquement, supposons les I_i deux à deux étrangers et soit $B_i = \bigcap_{j \neq i} I_j$. Comme pour chaque $i > 1$, on a $I_i + I_1 = A$, il existe $a_i \in I_1$ et $a'_i \in I_i$ tels que $1 = a_i + a'_i$. Par conséquent

$$1 - (a'_2 \cdots a'_t) = 1 - (1 - a_2) \cdots (1 - a_t) \in I_1.$$

Comme $a'_2 \cdots a'_t \in B_1$ par définition, on a $1 \in I_1 + B_1$ et donc $A = I_1 + B_1$. Posons donc $1 = c_1 + b_1$ avec $c_1 \in I_1$ et $b_1 \in B_1$. Alors

$$f(b_1) = (1 - c_1 + I_1, b_1 + I_2, \ldots, b_1 + I_t) = (1 + I_1, I_2, \ldots, I_t).$$

De même, pour chaque $i > 1$, il existe $b_i \in B_i$ tel que

$$f(b_i) = (I_1, \ldots, 1 + I_i, \ldots, I_t).$$

Donc, ponr tout ensemble $\{x_1, \ldots, x_t\}$ d'éléments de A, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{t} b_i x_i\right) = (x_1 + I_1, \ldots, x_t + I_t)$$

et f est bien surjective. □

On déduit immédiatement du théorème que si A est une algèbre et $I_1, \ldots, I_t$ sont des idéaux bilatères, alors le morphisme $f : A \to \prod_{i=1}^{t}(A/I_i)$ défini par $a \mapsto (a+I_i)_{1 \leq i \leq t}$ (pour $a \in A$) est un isomorphisme si et seulement si les I_i sont deux à deux étrangers et tels que $\bigcap_{i=1}^{t} I_i = 0$. En outre, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.7 (THÉORÈME CHINOIS). *Soient $m_1, \ldots, m_t$ des entiers positifs deux à deux copremiers et $a_1, \ldots, a_t$ des entiers arbitraires. Il existe un entier x tel que $x \equiv a_i \mod m_i$ pour tout $1 \leq i \leq t$.*

DÉMONSTRATION. En effet, m_i et m_j sont copremiers si et seulement s'il existe des entiers s, t tels que $sm_i + tm_j = 1$. Par conséquent, m_i et m_j sont copremiers si et seulement si $\mathbb{Z} = m_i\mathbb{Z} + m_j\mathbb{Z}$, ce qui revient à dire que $m_i\mathbb{Z}$ et $m_j\mathbb{Z}$ sont des idéaux étrangers de $\mathbb{Z}$. L'existence de x revient alors à la surjectivité du morphisme $\mathbb{Z} \to \prod_{i=1}^{t} \mathbb{Z}_{m_i}$ défini par $a \mapsto (a + m_i\mathbb{Z})_{1 \le i \le t}$ (pour $a \in \mathbb{Z}$). □

4. Modules simples.

Un module est dit simple lorsque son treillis de sous-modules est le plus simple possible.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. Un A-module non nul S_A est dit *simple* si ses seuls sous-modules sont 0 et S.

Il est clair qu'un idéal à droite I_A d'une algèbre A est un A-module simple si et seulement si I_A est minimal dans l'ensemble des idéaux à droite non nuls de A. Bien sûr, il n'est pas vrai que toute algèbre ait des idéaux à droite minimaux, et donc des sous-modules simples: en effet, si une algèbre artinienne admet, par définition, de tels sous-modules, l'algèbre noethérienne $\mathbb{Z}$ n'en admet pas. Par contre, toute algèbre A admet, par (II.1.7), des idéaux à droite maximaux. La proposition suivante implique alors que, pour toute K-algèbre A, il existe des A-modules simples.

PROPOSITION 4.1. *Soient A une K-algèbre et S_A un A-module non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *S_A est simple.*
(ii) *$S = xA$ pour tout $0 \neq x \in S$.*
(iii) *Il existe un idéal à droite maximal I de A tel que $S \xrightarrow{\sim} A/I$.*

DÉMONSTRATION. (i) implique (ii). En effet, si $0 \neq x \in S$, alors xA est un sous-module non nul de S, donc est égal à ce dernier.

(ii) implique (i). En effet, si M est un sous-module non nul de S, et $0 \neq x \in M$, la condition donnée implique (puisque $x \in S$) que $S = xA \subseteq M$ d'où $S = M$.

(i) implique (iii). Il suit de l'équivalence de (i) et (ii) que S est cyclique. Par (II.4.2), il existe un idéal à droite I de A tel que $S \xrightarrow{\sim} A/I$. Mais alors, la simplicité de S et le théorème d'isomorphisme (II.4.5) impliquent que I est maximal.

(iii) implique (i) suit directement du théorème d'isomorphisme (II.4.5) et de la maximalité de I. □

On voit donc qu'un module simple est une forme particulièrement forte de module cyclique, puisque tout élément non nul l'engendre. Les modules simples sont souvent considérés comme des blocs permettant de bâtir les autres modules. Par exemple, il suit du théorème fondamental de structure des groupes abéliens de type fini, que tout groupe abélien ($\mathbb{Z}$-module) fini s'obtient (en prenant des sommes directes et des extensions) à partir des $\mathbb{Z}$-modules simples, et ces derniers sont précisément les $\mathbb{Z}$-modules de la forme $\mathbb{Z}_p$, avec p premier. Nous verrons à la section suivante comment généraliser cet énoncé.

La propriété principale des A-modules simples est la suivante:

LEMME 4.2 (LEMME DE SCHUR). *Soit $f : M_A \to N_A$ une application A-linéaire non nulle.*

(a) *Si M est simple, alors f est injective.*
(b) *Si N est simple, alors f est surjective.*

DÉMONSTRATION. Comme $f \neq 0$, on a $\operatorname{Ker} f \neq M$ et $\operatorname{Im} f \neq 0$. Par conséquent, si M est simple, on a $\operatorname{Ker} f = 0$ tandis que, si N est simple, on a $\operatorname{Im} f = N$. □

COROLLAIRE 4.3. *Soit S_A un A-module simple, alors* $\operatorname{End} S$ *est un corps (peut être gauche).*

DÉMONSTRATION. Il suit en effet du lemme de Schur (4.1) que tout morphisme non nul $f : S \to S$ est un isomorphisme. □

5. Suites de composition, théorème de Jordan-Hölder.

Il est naturel d'essayer de construire de nouveaux modules par extensions répétées de modules simples. Cela mène à la définition suivante.

DÉFINITION. Soit M un A-module non nul. Une suite finie de sous-modules de M

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M$$

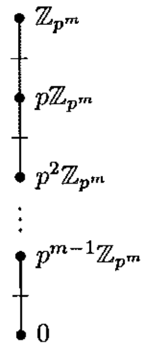
est appelée une *suite de composition* de *longueur* m pour M si chaque M_{i+1}/M_i (où $0 \leq i < m$) est un A-module simple. Ces quotients sont appelés les *facteurs de composition* de M.

Il revient au même de stipuler que chaque terme de la suite est maximal dans le suivant. On remarque que la longueur m n'est autre que le nombre de facteurs de composition.

EXEMPLES 5.1. (a) On considère le groupe abélien $\mathbb{Z}_{p^m}$ (avec $m > 0$, et p premier). On sait qu'il existe une suite de sous-groupes

$$0 = p^m\mathbb{Z}_{p^m} \subsetneqq \cdots \subsetneqq p^i\mathbb{Z}_{p^m} \subsetneqq p\mathbb{Z}_{p^m} \subseteq \mathbb{Z}_{p^m}$$

avec $p^i\mathbb{Z}_{p^m}/p^{i+1}\mathbb{Z}_{p^m} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$ simple. C'est donc une suite de composition. En fait le treillis de sous-groupes de $\mathbb{Z}_{p^m}$ est de la forme



Les facteurs de composition sont représentés par les segments verticaux, tous isomorphes à $\mathbb{Z}_p$. On remarque que $\mathbb{Z}_{p^m}$ admet une unique suite de composition.

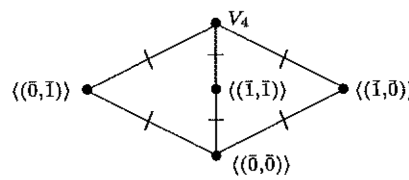
(b) Le groupe de Klein $V_4 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ admet trois suites de composition distinctes

$$\langle(\bar{0},\bar{0})\rangle \subsetneqq \langle(\bar{0},\bar{1})\rangle \subsetneqq V_4,$$
$$\langle(\bar{0},\bar{0})\rangle \subsetneqq \langle(\bar{1},\bar{0})\rangle \subsetneqq V_4,$$

et

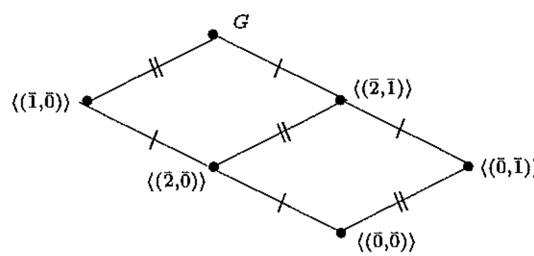
$$\langle(\bar{0},\bar{0})\rangle \subsetneqq \langle(\bar{1},\bar{1})\rangle \subsetneqq V_4.$$

Ici, le treillis de sous-groupes est de la forme



On remarque que chaque facteur de composition est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$.

(c) Par contre, $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$ a un treillis de sous-groupes de la forme



On a encore 3 suites de composition distinctes données par

$$\langle(\bar{0},\bar{0}\rangle \subsetneqq \langle(\bar{2},\bar{0})\rangle \subsetneqq \langle(\bar{1},\bar{0})\rangle \subsetneqq G,$$
$$\langle(\bar{0},\bar{0}\rangle \subsetneqq \langle(\bar{2},\bar{0})\rangle \subsetneqq \langle(\bar{2},\bar{1})\rangle \subsetneqq G,$$
$$\langle(\bar{0},\bar{0}\rangle \subsetneqq \langle(\bar{0},\bar{1})\rangle \subsetneqq \langle(\bar{2},\bar{1})\rangle \subsetneqq G.$$

On remarque que dans chacune de ces suites, toutes de longueur 3, on a deux facteurs de composition isomorphes à $\mathbb{Z}_2$ (indiqués par une barre simple) et un facteur de composition isomorphe à $\mathbb{Z}_3$ (indiqué par une barre double). Le but de cette section est d'expliquer ce phéuomène.

PROPOSITION 5.2. *Un A-module M est artinien et noethérien si et seulement s'il admet une suite de composition.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. En utilisant l'hypothèse que M est artinien, on va construire une suite

$$0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq \cdots$$

de sous-modules de M telle que les quotients M_{i+1}/M_i sont simples. En effet, supposons que $M_0, \ldots, M_i$ ont été construits et que $M_i \neq M$. On considère le A-module M/M_i. Il suit de (1.3) que M/M_i est artinien. Il existe donc un sous-module M_{i+1} de M contenant M_i tel que M_{i+1}/M_i soit un sous-module minimal de M/M_i (c'est-à-dire, soit simple). Comme M est un A-module noethérien, la suite $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_2 \subsetneqq \cdots$ doit devenir stationnaire. Il suit de notre construction que cela implique l'existence d'un m tel que $M_m = M$.

Suffisance. Supposons que M ait une suite de composition. On prouvera l'énoncé par récurrence sur la longueur minimale m de toutes les suites de composition pour M. Si $m = 1$, M est un A-module simple et donc est trivialement artinien et noethérien. Si $m > 1$, on considère une suite de composition $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_m = M$ de longueur minimale m pour M. Alors M_{m-1} a une suite de composition de longueur $m - 1$, donc est artinien et noethérien, par l'hypothèse de récurrence. D'autre part, M/M_{m-1} est simple, donc aussi artinien et noethérien. On applique (1.3) à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M_{m-1} \longrightarrow M \longrightarrow M/M_{m-1} \longrightarrow 0. \quad \square$$

Il suit immédiatement de cette proposition et de (1.3) que si l'on a une suite exacte courte de A-modules

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

alors M admet une suite de composition si et seulement si L et N en admettent. Nous arrivons au résultat principal de cette section, qui dit qu'un module artinien et noethérien détermine uniquement ses facteurs de composition ainsi que leur nombre (Par contre, l'ordre des facteurs de composition n'est pas uniquement déterminé, et donc la réciproque du théorème suivant n'est généralement pas vraie: deux modules non-isomorphes peuvent avoir exactement les mêmes facteurs de composition, et en nombre égal).

THÉORÈME 5.3 (THÉORÈME DE JORDAN-HÖLDER). *Si un A-module M admet deux suites de composition*

$$0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_m = M$$

et

$$0 = N_0 \subsetneqq N_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq N_n = M$$

alors $m = n$ et il existe une permutation σ de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ telle que $N_{i+1}/N_i \xrightarrow{\sim} M_{\sigma(i)+1}/M_{\sigma(i)}$ pour tout $0 \leq i < m$.

DÉMONSTRATION. Par récurrence sur m. Si $m = 0$, alors $M = 0$ et $n = 0$. Si $m = 1$, alors M est simple: sa seule suite de composition est évidemment $0 \subsetneq M$, et donc $n = 1$. Si $m > 1$, on considère la suite de sous-modules:

$$\begin{aligned}0 = N_0 \cap M_{m-1} &\subseteq N_1 \cap M_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq N_n \cap M_{m-1} = M_{m-1} = N_0 + M_{m-1} \\ &\subseteq N_1 + M_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq N_n + M_{m-1} = M_m = M.\end{aligned}$$

Comme $M/M_{m-1} = M_m/M_{m-1}$ est simple, il existe un unique $0 \leq i < n$ tel que

$$M_{m-1} = N_0 + M_{m-1} = \cdots = N_i + M_{m-1} \subsetneq N_{i+1} + M_{m-1} = \cdots = N_n + M_{m-1} = M_m.$$

D'autre part, par (1.2), on a pour tout $0 \leq j < n$ une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \frac{N_{j+1} \cap M_{m-1}}{N_j \cap M_{m-1}} \longrightarrow \frac{N_{j+1}}{N_j} \longrightarrow \frac{N_{j+1} + M_{m-1}}{N_j + M_{m-1}} \longrightarrow 0.$$

En particulier, le terme médian de cette suite étant simple, un seul des termes extrémaux est isomorphe à ce module simple, tandis que l'autre est nul. Pour $j = i$, on a

$$\frac{M_m}{M_{m-1}} \xrightarrow{\sim} \frac{N_{i+1} + M_{m-1}}{N_i + M_{m-1}} \xrightarrow{\sim} \frac{N_{i+1}}{N_i}$$

(et donc $N_{i+1} \cap M_{m-1} = N_i \cap M_{m-1}$) tandis que, pour $j \neq i$, on a

$$\frac{N_{j+1} \cap M_{m-1}}{N_j \cap M_{m-1}} \xrightarrow{\sim} \frac{N_{j+1}}{N_j}$$

c'est-à-dire que $N_{j+1} \cap M_{m-1} \neq N_j \cap M_{m-1}$ et leur quotient est simple. Cela montre que la suite

$$\begin{aligned}0 = N_0 \cap M_{m-1} \subsetneq N_1 \cap M_{m-1} \subsetneq \cdots \subsetneq N_i \cap M_{m-1} = N_{i+1} \cap M_{m-1} \subsetneq \cdots \\ \subsetneq N_n \cap M_{m-1} = M_{m-1}.\end{aligned}$$

est une suite de composition pour M_{m-1} de longueur $n - 1$. Par l'hypothèse de récurrence, $m - 1 = n - 1$ (et donc $m = n$) et il existe une bijection σ : $\{0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$ telle que $N_{j+1}/N_j \xrightarrow{\sim} M_{\sigma(j)+1}/M_{\sigma(j)}$ pour $j \neq i$. On achève la démonstration en posant $\sigma(i) = m-1$. □

Il s'ensuit immédiatement que pour tout A-module M artinien et noethérien, c'est-à-dire ayant une suite de composition, toutes les suites de composition ont même longueur. Cette longueur est appelée *longueur de composition* de M et est notée $\ell(M)$. On convient que si $M = 0$, alors $\ell(M) = 0$. Un A-module M est simple si et seulement si $\ell(M) = 1$. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_{p^m}$ ($m > 0$, p premier) est de longueur m, tandis que $\ell(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = 2$ et $\ell(\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3) = 3$ (voir (5.1)). On note que dire que M admet une suite de composition revient à dire que M est *de longueur* (de composition) *finie*: nous emploierons de préférence cette dernière expression.

COROLLAIRE 5.4. *Soit M un A-module de longueur finie. Alors M est de type fini.*

DÉMONSTRATION. En effet, si M est de longueur finie, il est noethérieu, par (5.2). Il ne reste plus qu'à appliquer (1.5). □

L'intérêt de ce corollaire est le suivant. Comme nous l'avons déjà dit, nous montrerons que toute algèbre artinienne à droite est aussi noethérienne à droite. Soit donc M un module de type fini sur une algèbre artinienne à droite. Il suit de (2.3) que M est artinien et noethérien. Par (5.2), M est de longueur finie. Le corollaire (5.4) nous assure alors que toutes les conditions précédentes sont équivalentes. Nous montrerons ceci en (VII.4.12) plus bas.

COROLLAIRE 5.5. *Soit* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de modules de longueur finie. Alors*

$$\ell(M) = \ell(L) + \ell(N).$$

DÉMONSTRATION. On peut supposer $L \subseteq M$ et $N = M/L$. Si $0 = L_0 \subsetneqq L_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq L_s = L$ est une suite de composition pour L et $0 = M_0/L \subsetneqq M_1/L \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_t/L = M/L = N$ en est une pour N, alors on vérifie immédiatement que la suite $0 = L_0 \subsetneqq L_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq L_s = L = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_t = M$ est une suite de compositiou pour M. Par conséquent, on a $\ell(M) = s + t = \ell(L) + \ell(N)$. $\square$

COROLLAIRE 5.6 (FORMULE DE GRASSMANN). *Soient L, N deux sous-modules de M, alors*

$$\ell(L + N) + \ell(L \cap N) = \ell(L) + \ell(N).$$

DÉMONSTRATION. On considère les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow L \cap N \longrightarrow L \longrightarrow L/(L \cap N) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow L + N \longrightarrow (L + N)/N \longrightarrow 0.$$

Comme $L/(L \cap N) \xrightarrow{\sim} (L + N)/N$, on a, par (5.5)

$$\ell(L + N) - \ell(N) = \ell((L + N)/N) = \ell(L/(L \cap N)) = \ell(L) - \ell(L \cap N)$$

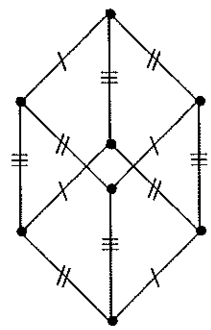
d'où l'énoncé. $\square$

6. Modules semisimples.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. Un A-module M est dit *semisimple* s'il est une somme (peut-être infinie) de A-modules simples.

On convient de considérer le module nul comme semisimple, en tant que somme vide de modules simples. Il est clair que tout module simple est semisimple. Tout espace vectoriel sur un corps C (peut-être gauche) est semisimple en tant que C-module: en effet, un tel espace est somme directe de copies de C_C, et comme $\dim C_C = 1$, on a que C_C est simple.

Soit $A = \mathbb{Z}$. Le module $\mathbb{Z}_{30}$ est semisimple, puisque $\mathbb{Z}_{30} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ et chacun des facteurs $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ et $\mathbb{Z}_5$ est simple. Par contre, pour un nombre premier p arbitraire, $\mathbb{Z}_{p^2}$ n'est pas semisimple: en effet, il a un unique sous-module non-trivial $\mathbb{Z}_p$. On comparera utilement les treillis de sous-modules de $\mathbb{Z}_{30}$:



et de $\mathbb{Z}_{p^2}$:

Si $S_1 \neq S_2$ sont deux sous-modules simples de M, alors $S_1 + S_2 = S_1 \oplus S_2$: en effet, si $S_1 \cap S_2 \neq 0$, on aurait $S_1 = S_1 \cap S_2 = S_2$. Donc un module semisimple qui est somme finie de modules simples en est une somme directe. Il est raisonnable de se demander s'il en est de même pour les sommes arbitraires de modules simples.

Dans notre premier lemme, nous montrons que tout sous-module d'un A-module semisimple en est un facteur direct.

LEMME 6.1. *Soient* $S_A = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$, *où chaque* S_λ *est un* A*-module simple, et* L_A *un sous-module arbitraire de* S. *Alors il existe* $\Sigma \subseteq \Lambda$ *tel que* $S = L \oplus \left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma \right)$.

DÉMONSTRATION. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des parties Σ de Λ ayant la propriété que la somme $L + \sum_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma$ est directe. Alors $\mathcal{E} \neq \emptyset$, puisque la partie vide est un élément de $\mathcal{E}$. Comme il est clair que $\mathcal{E}$, ordonné par inclusion, est un ensemble inductif, il suit du lemme de Zorn qu'il existe une partie Σ de Λ maximale pour la propriété que la somme $M = L + \sum_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma$ est directe. Il reste à montrer que $M = S$. Comme $S = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$, il suffit de prouver que $S_\lambda \subseteq M$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Mais si $S_\lambda \nsubseteq M$, comme S_λ est simple, on a que $S_\lambda \cap M = 0$. Par conséquent, la somme $M + S_\lambda$ est directe ce qui contredit la maximalité de Σ. □

THÉORÈME 6.2. *Soit S_A un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *S_A est semisimple.*
(b) *S_A est somme directe de A-modules simples.*
(c) *Tout sous-module de S en est un facteur direct.*

DÉMONSTRATION. Si (b) implique (a) trivialement, il suit de (6.1) avec $L = 0$ que (a) implique (b). Ou a d'autre part, toujours par (6.1), que (a) implique (c). Il reste à montrer que (c) implique (a).

On commence par montrer que tout sous-module non nul L de S contient un sous-module simple. Comme un tel sous-module non nul contient toujours un sous-module cyclique, on peut supposer L cyclique. Par (II.1.6), L contieut un sous-module maximal M. Par (c), il existe un sous-module N de S tel que $S = M \oplus N$. Il suit alors de la loi modulaire (II.1.4) que

$$L = (M \oplus N) \cap L = M \oplus (N \cap L).$$

On en déduit que $N \cap L \xrightarrow{\sim} L/M$ est un sous-module simple de L, ce qui montre notre énoncé.

Soit donc S' la somme de tous les sous-modules simples de S. Par (c), il existe L tel que $S = S' \oplus L$. Or, si $L \neq 0$, on aurait que L contient un sous-module simple, lequel doit aussi être un sous-module de S' (par définition de ce dernier) on arrive à l'absurdité $S' \cap L \neq 0$. Par conséquent $L = 0$ et $S = S'$ est semisimple. □

Il suit directement de (6.2) que toute somme directe de modules semisimples est semisimple. En outre, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 6.3. *Soit $S_A = \sum_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ avec les S_λ des A-modules simples. Si M est un sous-module de S, alors il existe $\Sigma \subseteq \Lambda$ tel que $M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma$.*

DÉMONSTRATION. Par (6.2), il existe un sous-module N tel que $S = M \oplus N$ et donc, par (6.1), on a une partie $\Sigma \subseteq \Lambda$ telle que $S = N \oplus \left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma \right)$. Donc $M \xrightarrow{\sim} S/N \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma$. □

COROLLAIRE 6.4. *Soit $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules. Si M est semisimple, alors L et N sont semisimples.*

DÉMONSTRATION. En effet, L est un sous-module de M, donc en est un facteur direct par (6.2). Par conséquent, il existe un sous-module L' de M tel que $M = L \oplus L'$. Or $N \xrightarrow{\sim} M/L \xrightarrow{\sim} (L \oplus L')/L \xrightarrow{\sim} L'$ donne que N est aussi isomorphe à un sous-module de M. Il ne reste plus qu'à appliquer (6.3) à L et N. □

Si, dans la suite exacte de (6.4), L et N sont semisimples, il n'en est pas nécessairement de même de M, comme le montre la suite exacte de $\operatorname{Mod}\mathbb{Z}$

$$o \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

(où p désigne un nombre premier, f est l'inclusion de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{Z}_{p^2}$, et $g = \operatorname{coker} f$).

Si $f : S_A \to S'_A$ est un morphisme entre modules semisimples, il suit du lemme de Schur (4.2) que l'image d'un sous-module simple de S est un sous-module simple de S' qui lui est isomorphe. D'autre part, l'algèbre d'endomorphismes d'un module simple est, encore d'après le lemme de Schur, un corps (peut-être gauche). On déduit de ces deux remarqnes et de (III.2.11) une description de l'algèbre d'endomorphismes d'une somme directe finie de modules simples.

PROPOSITION 6.5. *Soit* $S = \bigoplus_{i=1}^{t}\left(\bigoplus_{k=1}^{n_i} S_{ik}\right)$ *avec les* S_{ik} *simples et* $S_{ik} \xrightarrow{\sim} S_{j\ell}$ *si et seulement si* $i = j$. *Alors, posant* $K_i = \operatorname{End} S_{ik}$, *on a:*

$$\operatorname{End} S_A \xrightarrow{\sim} M_{n_1}(K_1) \times \cdots \times M_{n_t}(K_t).$$

DÉMONSTRATION. Posons $M_i = \bigoplus_{k=1}^{n_i} S_{ik}$. Il suit des remarques précédentes et de (III.2.11) que $\operatorname{Hom}_A(M_i, M_j) = 0$ pour $i \neq j$ et que

$$\operatorname{End} M_i = [\operatorname{Hom}_A(S_{ik}, S_{i\ell}]_{k\ell} \xrightarrow{\sim} M_{n_i}(\operatorname{End} S_{ik}) = M_{n_i}(K_i)$$

où K_i est un corps (peut-être gauche). Par couséquent,

$$\operatorname{End} S_A = [\operatorname{Hom}_A(M_i, M_j)]_{ij} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{t} \operatorname{End} M_i \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{t} M_{n_i}(K_i). \quad \square$$

Par exemple, si $A = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$, il suit du calcul précédent que

$$\operatorname{End} M \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{Z}_3) \times \mathbb{Z}_5.$$

7. Algèbres semisimples.

DÉFINITION. Une K-algèbre A est dite *semisimple* si A_A est un A-module semisimple.

Le lecteur remarquera l'asymétrie virtuelle de cette définition: en effet, si A_A est semisimple, rien n'indique que ${}_AA$ soit aussi semisimple. C'est pourtant le cas, ainsi qu'on le verra plus bas.

Commençons notre analyse des algèbres semisimples par quelques commentaires. Un idéal à droite de A qui est simple en tant que A-module est bien sûr minimal. Une algèbre semisimple est douc une somme directe d'idéaux à droite minimaux. D'autre part, si S_A est uu A-module simple arbitraire, alors S_A est isomorphe à un quotient de A par un idéal à droite maximal, donc, par (6.4), est isomorphe à un facteur direct de A_A lequel est douc un idéal à droite minimal de A. Nous avons montré que, si A est semisimple, alors les A-modules simples coïncident avec les idéaux à droite minimaux de A. Le théorème suivant, dû à Wedderburn, décrit complètement la structure des algèbres semisimples.

THÉORÈME 7.1. *Soit A une K-algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est semisimple.*
(b) *Tout A-module à droite est semisimple.*
(c) *Tout A-module à droite est projectif.*
(d) *Tout A-module à droite est injectif.*
(e) *Toute suite exacte courte $0 \longrightarrow L_A \longrightarrow M_A \longrightarrow N_A \longrightarrow 0$ est scindée.*
(f) *Tout idéal à droite de A est un facteur direct de A.*
(g) *$A \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{t} M_{n_i}(K_i)$, où les K_i sont des sur-corps (peut-être gauches) de K.*

DÉMONSTRATION. (a) équivaut à (b). En effet, si A_A est semisimple, tout module libre est semisimple et donc un module arbitraire l'est aussi (par (6.4)). La réciproque est évidente.

(a) équivaut à (f). En effet, si A est semisimple, (f) suit par (6.1). La réciproque suit par (6.2), puisque (f) dit que tout sous-module de A_A en est un facteur direct.

(c) équivaut à (e), lequel équivaut à (d). En effet, on applique (IV.2.4) et (IV.3.3).

(a) implique (g) d'après (6.5). En effet, A_A est égal à une somme directe finie de A-modules simples: écrivons $A_A = \oplus_\lambda S_\lambda$ avec les S_λ simples, on a $1 = e_{\lambda_1} + \cdots + e_{\lambda_t}$ avec $0 \neq e_{\lambda_i} \in S_{\lambda_i}$ pour $1 \leq i \leq t$. Par (4.4), on a $S_{\lambda_i} = e_{\lambda_i} A$. En outre, tout $a \in A$ s'écrivant $a = 1 \cdot a = e_{\lambda_1} + \cdots + e_{\lambda_t} a \in \sum_{i=1}^{t} S_{\lambda_i}$, on a bien $A = \bigoplus_{i=1}^{t} S_{\lambda_i}$, et on peut appliquer (6.5).

(b) implique (e). Soit en effet $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de $\operatorname{Mod} A$. Si tout A-module est semisimple, il suit de (6.2) que L est un facteur direct de M, et la suite est scindée.

(e) implique (f). En effet, dire que toute suite exacte courte de $\operatorname{Mod} A$ est scindée entraîne par exemple que tout idéal à droite de A en est un facteur direct.

(g) implique (a). Comme il est clair qu'nn produit fini d'algèbres semisimples est semisimple, il suffit de montrer que si K' est un sur-corps (peut-être gauche) de K, alors $M_n(K')$ est semisimple. Posons $M_n(K') = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i$, où $I_i = \mathbf{e}_{ii} M_n(K')$. Nous montrerons que I_i est un sous-module simple de $M_n(K')$: cela montrera bien que $M_n(K')$ est semisimple. Si on considère I_i comme un K'-module (c'est-à-dire, K'-espace vectoriel) à gauche, on a $I_i \xrightarrow{\sim} K'^{(n)}$, l'action de $M_n(K')$ à droite pouvant s'interpréter comme celle de l'ensemble des endomorphismes du K'-module I_i. Soit $x \in I_i$ un élément non nul. Il existe une base

$\mathcal{B}$ du K'-espace vectoriel I_i telle que $x \in \mathcal{B}$. Pour chaque $y \in I_i$, cette base permet de construire une application K'-linéaire $f : I_i \to I_i$ telle que $y = f(x)$. On a donc $xM_n(K') = I_i$ pour chaque $x \in I_i$ tel que $x \neq 0$. Par (4.1), I_i est bien simple. □

En particulier, tout sur-corps K' de K est une K-algèbre semisimple.

Comme la condition (g) du théorème est symétrique, on peut ajouter au théorème d'autres conditions équivalentes avec "droite" remplacé par "gauche". En particulier, une algèbre est semisimple "à droite" si et seulement si elle l'est "à gauche". Cela justifie notre omission du côté dans l'énoncé de la définition.

On a montré au passage que toute algèbre semisimple est artinienne et noethérienne: en effet, on a prouvé (dans (a) implique (g)) que A_A est égal à une somme directe finie de A-modules simples, donc A_A est de longueur finie et, par conséquent, est un module artinien et noethérien (voir (5.2)).

Il existe un cas particulier important, à savoir celui où K est un corps algébriquement clos.

PROPOSITION 7.2. *Soient K un corps, et A une K-algèbre de dimension finie. Pour tout $a \in A$, il existe un unique polynôme unitaire $m_a \in K[t]$ qui est irréductible et tel que:*

(a) $m_a(a) = 0$.
(b) *Si $f \in K[t]$ est tel que $f(a) = 0$, alors m_a divise f (on dit que m_a est le* polynôme minimal *de $a \in A$).*

DÉMONSTRATION. Comme $K[t]$ est un domaine d'intégrité principal, il suffit de démontrer l'existence d'un polynôme $f \in K[t]$ tel que $f(a) = 0$. Or, comme A est un K-espace vectoriel de dimension finie, les éléments $1, a, \dots, a^n, \dots$ de A ne peuvent être tous linéairement indépendants sur K. □

COROLLAIRE 7.3. *Soit K un corps algébriquement clos. Si K' est un sur-corps de K et est de dimension finie sur K, alors $K' = K$.*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in K'$, il existe un polynôme $m_a \in K[t]$ irréductible et unitaire tel que $m_a(a) = 0$. Or, K étant algébriquement clos, on a $m_a(t) = t - \alpha$ (pour un $\alpha \in K$). Donc $0 = m_a(a) = a - \alpha$ entraîne $a = \alpha \in K$. □

COROLLAIRE 7.4. *Soit A une K-algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos K. Alors A est semisimple si et seulement si $A \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{t} M_{n_i}(K)$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit, par (7.3) et (7.1), de montrer que l'algèbre d'endomorphismes d'un A-module simple S est de dimension finie sur K. Or un tel A-module simple S est isomorphe à un idéal à droite minimal de A, donc à un sous-espace vectoriel de A_K. Par conséquent $\dim_K S \leq \dim_K A < \infty$ et $\dim_K \operatorname{End} S < \infty$. □

Rappelons qu'une K-algèbre $A \neq 0$ est dite simple si ses seuls idéaux bilatères sont 0 et A. On a vu en (I.1.2), exemple (c), que, si K' est un sur-corps (peut-être gauche) de K, alors $M_n(K')$ est simple. Le théorème suivant, dû à Wedderburn et Artin, montre que la réciproque est vraie dans le cas artinien.

THÉORÈME 7.5. *Soit A une K-algèbre artinienne à droite (ou à gauche) non nulle. Alors A est simple si et seulement s'il existe un sur-corps (peut-être gauche) K' de K et un $n > 0$ tels que $A \xrightarrow{\sim} M_n(K')$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer la nécessité. Comme A est artinienne à droite et non nulle, elle doit avoir des idéaux à droite minimaux, c'est-à-dire des A-modules simples. Alors $AS = \sum_{a \in A} aS$ est un idéal bilatère non nul de A, pour tout A-module simple S. Par conséquent, $\sum_{a \in A} aS = A$ puisque A est simple. Or, pour chaque $a \in A$, on a un épimorphisme $S_A \to aS_A$ défini par $x \mapsto ax$ (pour $x \in S$). Comme S est simple, le sous-module aS de A est nul, ou bien est simple, et isomorphe à S. Par conséquent, A_A est semisimple. Par (7.1), A est un produit d'algèbres de matrices. Il ne reste plus qu'à appliquer encore une fois l'hypothèse que A n'a pas d'idéaux bilatères non triviaux. □

COROLLAIRE 7.6. *Soient K un corps algébriquement clos, et A une K-algèbre de dimension finie. Alors A est simple si et seulement s'il existe $n > 0$ tel que $A \xrightarrow{\sim} M_n(K)$.*

DÉMONSTRATION. Cela suit de (7.5) et (7.3). □

Les théorèmes (7.1) et (7.5) nous permettent de donner une description complète des modules de type fini sur une algèbre semisimple et artinienne. En effet, supposons d'abord que l'on a affaire à une algèbre simple et artinienne.

PROPOSITION 7.7. *Soit $A = M_n(K')$ avec K' un sur-corps de K. Pour $1 \leq i \leq n$, posons $S_i = \mathbf{e}_{ii}A$. Alors:*

(a) $A_A \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$.

(b) *S_i est un sous-module simple de A.*

(c) *$S_i \xrightarrow{\sim} S_j$ pour tous i, j.*

DÉMONSTRATION. (a) est évidente, puisque les $\mathbf{e}_{ii}$ sont des idempotents deux à deux orthogonaux.

(b) Il est clair que S_i est simple, il suffit, par (4.1), de prouver que $S_i = \mathbf{x}A$ pour tout $\mathbf{x} \in S_i$ non nul. Un tel $\mathbf{x}$ s'écrit $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_{ij}x_j$ et il existe $1 \leq j_0 \leq n$ tel que $x_{j_0} \neq 0$. Mais alors, pour un $\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_{ik}y_k \in S_i$, on a toujours $\mathbf{y} = \mathbf{x}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_{jk}x_j^{-1}y_k\right) \in \mathbf{x}A$. Cela montre bien que $S_i = \mathbf{x}A$.

(c) En effet, on considère le morphisme $f : S_i \to S_j$ défini par $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{e}_{ji}\mathbf{x}$. Il est non nul, puisque $f(\mathbf{e}_{ii}) = \mathbf{e}_{ji}\mathbf{e}_{ii} = \mathbf{e}_{jj}\mathbf{e}_{ji}$. Comme S_i et S_j sont simples, f est un isomorphisme (par (4.2)). □

Comme les modules simples coïncident avec les idéaux à droite minimaux, il suit de (7.7) que S_i est, à isomorphisme près, le seul A-module simple. Ou a montré qu'une algèbre simple et artinienne à droite n'admet, à isomorphisme près, qu'un seul module simple.

COROLLAIRE 7.8. *Soit A une algèbre semisimple et artinienne. Alors A n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de A-modules simples.*

DÉMONSTRATION. Commençons par rappeler que, comme on l'a vu juste après la définition, uu module simple sur une algèbre semisimple en est uu facteur direct. D'autre part, par (7.1), $A = \prod_{i=1}^{t} A_i$ avec chaque $A_i = M_{n_i}(K_i)$ simple et artinienne (par (7.5), car A, étant semisimple, est artinienne et A_i en est un quotient). Chaque A_i n'admet, par (7.7), qu'un seul module simple S_i (à isomorphisme près). Il suit alors de (3.5) que $\{S_1, S_2, \dots, S_t\}$ est un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphismes de A-modules simples. □

On note qu'avec les notations de la démonstration précédente, on a

$$A_A \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{t} S_i^{(n_i)}.$$

Ou en déduit la descriptiou de tout A-module M de type fini. En effet, un tel A-module M est semisimple (par 7.1)) donc égal à une somme directe finie de A-modules simples. Par conséquent il existe des $m_i \geq 0$ (où $1 \leq i \leq t$) tels que $M_A = \bigoplus_{i=1}^{t} S_i^{(m_i)}$.

Achevons ce chapitre sur l'exemple d'une classe très importante d'algèbres semisimples qui se retrouve en théorie des représentations des groupes finis.

THÉORÈME 7.9 (DE MASCHKE). *Soient G un groupe fini et K un corps commutatif dont la caractéristique ne divise pas l'ordre n de G. Alors KG est une K-algèbre semisimple.*

DÉMONSTRATION. Soient M un KG-module et L un sous-module. Il suffit, par (6.2), de montrer que L est un facteur direct de M. Soit $j : L \to M$ l'inclusion. Comme j est K-linéaire et L, M sont des K-espaces vectoriels, il existe une rétraction K-linéaire $p : M \to L$ telle que $pj = 1_L$. Soit $f : M \to L$ définie pour $x \in M$ par

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} p(xg^{-1})g$$

(en effet, l'hypothèse entraîne que $\frac{1}{n} \in K$). Il est clair que f est K-linéaire. Nons montrerons qu'elle est anssi KG-linéaire. Soient donc $x \in M$ et $g_0 \in G$.

Alors

$$\begin{aligned} f(xg_0) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} p(xg_0g^{-1})g = \frac{1}{n}\sum_{h\in G} p(xh^{-1})hg_0 \\ &= \left(\frac{1}{n}\sum_{g\in G} p(xh^{-1})h\right) g_0 = f(x)g_0. \end{aligned}$$

Cette relation et la distributivité entraînent que f est KG-linéaire. D'autre part, si $x \in L$, on a

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} p(xg^{-1})g = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} xg^{-1}g = x.$$

Par conséquent, $fj = 1_L$: on a montré que j est une section KG-linéaire. □

Par exemple, pour tout groupe fini G, $\mathbb{C}G$ est une $\mathbb{C}$-algèbre semisimple.

Exercices du Chapitre VI.

1. Soient $M_1, \dots, M_n$ des sous-modules d'un A-module M. Montrer que, si tous les M_i sont artiniens (ou noethériens), alors il en est de même de $\sum_{i=1}^{m} M_i$.

2. Soient $I_1, \dots, I_n$ des idéaux à droite d'une K-algèbre A. Montrer que l'on a un isomorphisme de A-modules $A_A \xrightarrow{\sim} I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ si et seulement s'il existe un ensemble $\{e_1, \dots, e_n\}$ d'idempotents orthogonaux de A tels que $1 = e_1 + \cdots + e_n$ et $I_i = e_i A$ pour $1 \leq i \leq n$.

3. Si $e \in A$ est un idempotent non nul, montrer que, pour tout $x \in A$, $e + ex(1-e)$ est aussi un idempotent non nul. En déduire que e est central si et seulement s'il commute avec tout idempotent de A.

4. Si A n'a pas d'élément nilpotent non nul, montrer que tout idempotent de A est central.

5. Soit A un domaine d'intégrité principal. Montrer que tout A-module à droite de type fini est noethérien.

6. Montrer que toute décomposition de l'identité d'une algèbre en somme d'idempotents centraux deux à deux orthogonaux ayant un nombre maximal de termes est unique.

7. Soient A une K-algèbre commutative et $I_1, \dots, I_n$ des idéaux deux à deux étrangers. Montrer que $I_1 \cdots I_n = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

8. Soient A uue K-algèbre commutative, $e, f \in A$ des idempotents. Montrer que $e + f - ef$ est un idempotent et que l'idéal engendré par e et f est principal engendré par $e + f - ef$.

9. Soit n un entier positif.

(a) Trouver la longueur de composition $\ell(\mathbb{Z}_n)$ du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_n$.
(b) Caractériser les n pour lesquels $\mathbb{Z}_n$ admet une suite de composition unique.

10. Donner des exemples de modules M tels que $\ell(M) = 2$ et:

(a) M a une suite de composition unique,
(b) M a exactement deux suites de composition,
(c) M a un nombre infini de suites de composition.

11. Montrer le théorème de raffinement de Schreier: si M est un module de longueur finie et

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_t = 0$$

est une suite de sous-modules de M, alors il existe une suite de composition

$$M = M_0' \supset M_1' \supset \cdots \supset M_n' = 0$$

telle que chaque M_i soit égal à un des M'_j.

12. Soient S_1, S_2 deux A-modules simples. Montrer que le treillis de sous-modules de $S_1 \oplus S_2$ est distributif si et seulement si $S_1 \not\xrightarrow{\sim} S_2$.

13. Trouver les A-modules simples si:
(a) $A = \mathbb{C}[t]$,
(b) $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$, où K est un corps.

14. Soient A un domaine d'intégrité qui n'est pas un corps et Q le corps des fractions de A. On considère Q comme un A-module. Montrer que $\operatorname{End}_A Q \xrightarrow{\sim} Q$, mais que Q_A n'est pas simple.

15. Soient A une K-algèbre commutative et I_1, I_2 deux idéaux de A tels que $I_1 \cap I_2 = 0$. Montrer que, si A/I_1 et A/I_2 sont noethériens, il en est de même de $A/(I_1 + I_2)$.

16. Soit A une K-algèbre noethérienne à droite. Montrer que, pour tout A-module M de type fini, il existe une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec chaque L_i libre de type fini.

17. Soit A une K-algèbre noethérienne. On note $\operatorname{mod} A$ la catégorie des A-modules de type fini. Pour une K-algèbre B, soit $F : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ un foncteur exact à droite. Modifier la démonstration du théorème de Watts (V.3.2) pour montrer qu'il existe un bimodule ${}_AT_B$ et un isomorphisme fonctoriel $F \xrightarrow{\sim} - \otimes_A T_B$.

18. Moutrer que tout module semisimple de type fini est une somme directe finie de modules simples.

19. Soient A une algèbre et M un A-module. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
(a) M_A est semisimple.
(b) Pour tout monomorphisme $j : L \to M$ et tout morphisme $f : L \to L'$, il existe un morphisme $f' : M \to L'$ tel que $f'j = f$.
(c) Pour tout épimorphisme $p : M \to N$ et tout morphisme $g : N' \to N$, il existe un morphisme $g' : N' \to M$ tel que $pg' = g$.

20. Soit I_A un idéal à droite minimal de l'algèbre A. Montrer que $I^2 = 0$, ou bien il existe un idempotent $e \in A$ tel que $I = eA$.

21. Soit C un corps, peut-être gauche. Montrer que deux $M_n(C)$-modules M et N qui sont de C-dimension finie sout isomorphes si et seulement si $\dim_C M = \dim_C N$.

22. Soient A une algèbre semisimple et I un idéal bilatère propre de A. Montrer que A/I est semisimple.

23. Montrer qu'une sous-algèbre d'une algèbre semisimple n'est généralement pas semisimple.

24. Soit $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de K-algèbres. Montrer que $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ est semisimple si et seulement si Λ est fini et chaque A_λ est semisimple.

25. Soient I un idéal minimal à droite de A et S un A-module simple. Montrer que $S_A \not\to I_A$ entraîne $SI = 0$.

26. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathbb{Z}_n$ soit semisimple.

27. Montrer qu'une K-algèbre commutative A est semisimple si et seulement si A est un produit fini de sur-corps commutatifs de K.

28. Soient A semisimple, $A = \prod_{i=1}^{t} A_i$, chaque A_i étant simple. Trouver tous les idéaux bilatères de A.

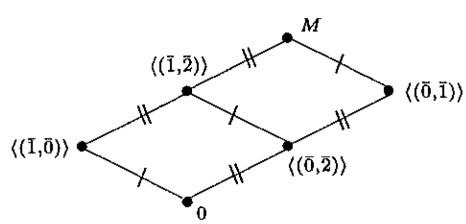
CHAPITRE VII

Radicaux de modules et d'algèbres.

Les théorèmes de Wedderburn-Artin donnent une description complète des algèbres semisimples et des modules de type fini sur celles-ci. On en sait beaucoup moins sur la structure des algèbres non semisimples et de leurs modules, et cela même s'il s'agit d'algèbres de dimension finie sur un corps commutatif. Cela donne l'idée d'introduire la notion de radical: c'est le plus petit sous-module (ou idéal) tel que le module quotient (ou l'algèbre quotient, respectivement) soit semisimple. Le radical sert donc à mesurer le défaut de semisimplicité. Comme on le verra, l'étude du radical s'avère particulièrement féconde dans le cas des modules de type fini sur les algèbres artiniennes.

1. Radical d'un module.

On cherche à caractériser le plus petit sous-module d'un module donné tel que le quotient soit semisimple. Prenons l'exemple du $\mathbb{Z}$-module $M = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$ ($\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{12}$). Ce module n'est évidemment pas semisimple (en effet, le sous-module $N = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ n'est pas un facteur direct de M). Son treillis de sous-modules est



(où une simple barre note un facteur de composition isomorphe à $\mathbb{Z}_3$ et une donble barre un facteur isomorphe à $\mathbb{Z}_2$). On voit de suite que le sous-module cherché est $R = \langle(\bar{0}, \bar{2})\rangle$, puisque $M/R \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. On peut caractériser R comme étant l'intersection des sous-modules maximaux $\langle(\bar{1}, \bar{2})\rangle$ et $\langle(\bar{0}, \bar{1})\rangle$. Cela mène à la définition suivante:

DÉFINITION. Soient A une K-algèbre et M un A-module. On appelle *radical* (*de Jacobson*) de M_A le sous-module de M qui est l'intersection de tous les sous-modules maximaux de M. Le radical de M est noté $\operatorname{rad} M$. Si $\operatorname{rad} M = 0$, on dit que M est *sans radical.*

Par exemple, si M est simple, alors $\operatorname{rad} M = 0$: tout module simple est sans radical.

Il peut se faire que M n'ait aucun sous-module maximal, auquel cas $M = \operatorname{rad} M$.

On peut reformuler la définition comme suit.

LEMME 1.1. *Soit M un A-module. Son radical* $\operatorname{rad} M$ *est égal à l'intersection des noyaux de tous les morphismes $f : M \to S$, où S_A parcourt l'ensemble de tous les A-modules simples.*

DÉMONSTRATION. Le lemme de Schur (VI.4.2) nous dit qu'un morphisme non-nul $M \to S$, avec S simple, est un épimorphisme. Les théorèmes d'isomorphisme entraînent alors que le noyau d'une telle application est un sous-module maximal de M, et, réciproquement, tout sous-module maximal de M est le noyau d'un épimorphisme de M sur un A-module simple. $\square$

PROPOSITION 1.2. *Soient M, N deux A-modules et $f : M \to N$ une application linéaire. Alors $f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad} N$.*

DÉMONSTRATION. Soit $g : N \to S$ une application linéaire avec S simple. Alors $gf : M \to S$ s'annule dans $\operatorname{rad} M$. Par conséquent, g s'annule dans $f(\operatorname{rad} M)$. $\square$

PROPOSITION 1.3. *Soit M_A un A-module.*

(a) *Pour tout sous-module N de M, on a*

$$\operatorname{rad}(M/N) \supseteq \frac{\operatorname{rad} M + N}{N}.$$

(b) *Si N est un sous-module de M contenu dans* $\operatorname{rad} M$, *alors* $\operatorname{rad}(M/N) = (\operatorname{rad} M)/N$.

(c) *Le radical de M est le plus petit des sous-modules N de M tels que M/N soit sans radical. En particulier,* $\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad} M) = 0$.

DÉMONSTRATION. (a) On applique (1.2) à la projection canonique $f : M \to M/N$, en observant que $f(\operatorname{rad} M) = (\operatorname{rad} M + N)/N$.

(b) Cela découle du fait que si $N \subseteq \operatorname{rad} M$, la correspondance $L \mapsto L/N$ définit une bijection entre sous-modules maximaux de M contenant N et sous-modules maximaux de M/N.

(c) Si $\operatorname{rad}(M/N) = 0$, alors (a) donne $\operatorname{rad} M + N = N$ donc $\operatorname{rad} M \subseteq N$. En particulier, si $N = \operatorname{rad} M$, (b) donne $\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad} M) = (\operatorname{rad} M)/(\operatorname{rad} M) = 0$. $\square$

Nous montrons maintenant que le radical se comporte bien vis-à-vis des sommes directes.

PROPOSITION 1.4. *Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules. Alors*

$$\operatorname{rad}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{rad} M_\lambda.$$

DÉMONSTRATION. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'injection canonique $M_\lambda \to \bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu$ induit (par (1.2)) une injection $\operatorname{rad} M_\lambda \to \operatorname{rad}\left(\bigoplus_{\mu\in\Lambda} M_\mu\right)$. Par conséquent, $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{rad} M_\lambda \subseteq \operatorname{rad}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right)$.

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{rad}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right)$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, si N_λ est un sous-module maximal de M_λ, on a que $N_\lambda \oplus \left(\bigoplus_{\mu\neq\lambda} M_\mu\right)$ est un sous-module maximal de $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Donc, $x \in \bigcap_{N_\lambda}\left(N_\lambda \oplus \left(\bigoplus_{\mu\neq\lambda} M_\mu\right)\right) = (\operatorname{rad} M_\lambda) \oplus \left(\bigoplus_{\mu\neq\lambda} M_\mu\right)$. Si $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, on a donc que $x_\lambda \in \operatorname{rad} M_\lambda$ pour chaque $\lambda \in \Lambda$. Cela montre bien que $x \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{rad} M_\lambda$. Par conséquent $\operatorname{rad}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \subseteq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{rad} M_\lambda$, et l'égalité s'ensuit. □

Une conséquence directe de cette proposition est que tout module semisimple est sans radical (en effet, un module simple est sans radical, comme on l'a vu plus haut). Nous reviendrons sur cette remarque plus loin.

Le résultat fondamental sur le radical est le lemme de Nakayama. Il nous sera particulièrement utile à la section (4) plus bas et au chapitre suivant. Vu l'importance de ce lemme, nous en donnerons plusieurs formulations. Quand on étudie le radical d'un module, il est naturel de se poser la question de l'existence de sous-modules maximaux d'un module donné. Or cette existence est assurée sous l'hypothèse que le module est de type fini.

LEMME 1.5. *Si M est un module non nul de type fini, alors* $\operatorname{rad} M \neq M$.

DÉMONSTRATION. En effet, il suit de (II.1.6) qu'un tel module contient toujours des sous-modules maximaux. □

LEMME 1.6 (DE NAKAYAMA). *Soient M un A-module de type fini et N un sous-module de M. Alors $N \subseteq \operatorname{rad} M$ si et seulement si pour tout sous-module L de M tel que $N + L = M$, on a $L = M$.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. Supposons $N \subseteq \operatorname{rad} M$ et que L est un sous-module de M tel que $N + L = M$. Supposons $L \neq M$. Comme M est de type fini, il existe (par (II.1.6)) un sous-module maximal L' de M contenant L et alors on a $N + L \subseteq \operatorname{rad} M + L' \subseteq L' \subsetneq M$, une contradiction.

Suffisance. Si $N \not\subseteq \operatorname{rad} M$, il existe un sous-module maximal M' ne contenant pas N (par définition du radical de M). Donc $M' + N = M$, mais $M' \neq M$. □

On exprime parfois la propriété du lemme en disant que tout sous-module N de $\operatorname{rad} M$ est *superflu* dans M. On verra que la notion de superfluité peut s'exprimer en termes de morphismes.

D'autre part, le lemme lui-même s'exprime par le biais de morphismes. En effet, si $f : M \to N$ est une application linéaire, alors $f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad} N$ de sorte que f induit, par passage aux conoyaux, un morphisme $\overline{f} : M/\operatorname{rad} M \to N/\operatorname{rad} N$ défini pour $x \in M$ par

$$\overline{f}(x + \operatorname{rad} M) = f(x) + \operatorname{rad} N.$$

Si on note respectivement $p_M : M \to M/\operatorname{rad} M$ et $p_N : N \to N/\operatorname{rad} N$ les projections canoniques, alors $\overline{f}$ est l'unique morphisme de A-modules tel que le carré suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_M"'] & N \arrow[d, "p_N"] \\ M/\operatorname{rad} M \arrow[r, "\overline{f}"] & N/\operatorname{rad} N \end{tikzcd} .$$

LEMME 1.7 (DE NAKAYAMA). *Soient M, N deux modules de type fini. Un morphisme $f : M \to N$ est un épimorphisme si et seulement si le morphisme induit $\overline{f} : M/\operatorname{rad} M \to N/\operatorname{rad} N$ est un épimorphisme.*

DÉMONSTRATION. La nécessité suit de la commutativité du carré précédent: $\overline{f}p_M = p_N f$, et du fait que p_N et f sont des épimorphismes.

Suffisance. Il suit de la définition de $\overline{f}$ que la surjectivité de $\overline{f}$ implique $N = f(M) + \operatorname{rad} N$. Mais $\operatorname{rad} N$ est superflu dans N, donc, par (1.6), $f(M) = N$. On a montré que f est surjective. □

Les considérations précédentes mènent à la définition.

DÉFINITION. Soient M, N deux A-modules, un *épimorphisme* $f : M \to N$ est dit *superflu* si, pour tout morphisme $h : L \to M$ tel que $fh : L \to N$ soit un épimorphisme, on a que h lui-même est un épimorphisme.

Cette notion est évidemment duale de celle de monomorphisme essentiel, introduite en (IV.4). Les deux propriétés suivantes (duales de celles de (IV.4.1)) sont immédiates.

LEMME 1.8. *Soient $f : L \to M$ et $g : M \to N$ deux épimorphismes de A-modules.*

(i) *Si g et f sont superflus, alors $gf : L \to N$ est aussi un épimorphisme superflu.*
(ii) *Si $gf : L \to N$ est un épimorphisme superflu, alors f est superflu.*

DÉMONSTRATION. (i) En effet, gf est évidemment un épimorphisme, et gfh épimorphisme implique successivement fh épimorphisme (par la superfluité de g) et h épimorphisme (par la superfluité de f).

(ii) En effet, si fh est un épimorphisme, il en est de même de gfh. Comme gf est superflu, h est un épimorphisme. □

Nous montrons maintenant que les épimorphismes superflus sont précisément ceux dont les noyaux sont des sous-modules superflus. Cela fournit une troisième version du lemme de Nakayama.

PROPOSITION 1.9. *Soient M, N deux A-modules de type fini et $f : M \to N$ un épimorphisme de noyau L. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *f est superflu.*
(b) $L \subseteq \operatorname{rad} M$.
(c) *Le morphisme $\overline{f} : M/\operatorname{rad} M \to N/\operatorname{rad} N$ induit de f est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. (a) implique (b). En effet, si $L \not\subseteq \operatorname{rad} M$, il existe un sous-module maximal M' de M tel que $L \not\subseteq M'$. Donc $L + M' = M$ et par conséquent la composition de l'inclusion $j : M' \to M$ avec $f : M \to N$ est un épimorphisme (puisque tout $y \in N$ s'écrit $y = f(x' + x)$ avec $x' \in M'$ et $x \in L$ donc, comme $L = \operatorname{Ker} f$, on a $y = f(x')$), tandis que $j : M' \to M$ ne l'est pas.

(b) implique (c). Il suffit, par (1.7), de vérifier que $\overline{f}$ est un monomorphisme. Or, si $p_M : M \to M/\operatorname{rad} M$ et $p_N : N \to N/\operatorname{rad} N$ désignent les projections canoniques, on a $\overline{f} p_M = p_N f$. Donc, si $x + \operatorname{rad} M \in \operatorname{Ker} \overline{f}$, on a

$$p_N f(x) = \overline{f} p_M(x) = \overline{f}(x + \operatorname{rad} M) = 0$$

d'où $f(x) \in \operatorname{rad} N$. Or $f(\operatorname{rad} M) = \operatorname{rad} N$ par (1.3)(b). Soit $y \in \operatorname{rad} M$ tel que $f(x) = f(y)$. On a $x - y \in \operatorname{Ker} f = L \subseteq \operatorname{rad} M$. Donc $x \in \operatorname{rad} M$.

(b) implique (a). Soit en effet h un morphisme tel que fh soit un épimorphisme. Alors $N = (\operatorname{Im} h + L)/L$ donc $M = \operatorname{Im} h + L$. Comme $L \subseteq \operatorname{rad} M$ on en déduit $M = \operatorname{Im} h$ et h est bien un épimorphisme.

(c) implique (a). Notons encore $p_M : M \to M/\operatorname{rad} M$ et $p_N : N \to N/\operatorname{rad} N$ les projections canoniques. Si fh est un épimorphisme, alors $p_N fh = \overline{f} p_M h$ l'est aussi. Comme $\overline{f}$ est un isomorphisme, $p_M h$ est un épimorphisme. Par le fait que (b) implique (a), on a que p_M est un épimorphisme superflu. Donc h est un épimorphisme. □

DÉFINITION. Soit M un A-module. Le quotient $M/\operatorname{rad} M$ s'appelle la *coiffe* de M.

On a vu en (1.5) que si M est un module non nul de type fini, alors la coiffe de M n'est pas nulle. En outre, par (1.3)(c) la coiffe d'un module est toujours sans radical. Enfin, il suit de (1.9) que, si M est de type fini, la projection canonique de M sur sa coiffe est un épimorphisme superflu.

2. Le socle d'un module.

On a vu que le radical d'un module M n'est autre que le plus grand sous-module N de M tel que la projection canonique $M \to M/N$ soit un épimorphisme superflu. Il est naturel de se demander quel est, dualement, le plus petit sous-module L de M tel que l'injection canonique $L \to M$ soit un monomorphisme essentiel. Ce n'est autre que le socle de M, défini comme suit.

DÉFINITION. Soient A une K-algèbre et M un A-module. On appelle *socle* de M le sous-module de M qui est la somme de tous les sous-modules simples (minimaux) de M. Le socle de M est noté $\operatorname{soc} M$.

Il est clair qu'un module M est semisimple si et seulement si $M = \operatorname{soc} M$. En fait, il suit de la définition que $\operatorname{soc} M$ est le plus grand sous-module semisimple de M. Par exemple, si $A = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$ $(\tilde{\to} \mathbb{Z}_{12})$, il est clair que $\operatorname{soc} M = \langle(\bar{0}, \bar{2})\rangle \oplus \langle(\bar{1}, \bar{0})\rangle \tilde{\to} \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$. Enfin, notons que, si M n'a pas de sous-modules simples (c'est le cas du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$), alors $\operatorname{soc} M = 0$.

On peut reformuler la définition comme dans le lemme suivant, qui dualise (1.1).

LEMME 2.1. *Soit M un A-module. Son socle* $\operatorname{soc} M$ *est égal à la somme des images de tous les morphismes $f : S \to M$ avec S_A parcourant l'ensemble des A-modules simples.*

DÉMONSTRATION. Évidente, puisque les images de tels morphismes coïncident avec les sous-modules simples de M. □

PROPOSITION 2.2. *Soient M, N deux A-modules et $f : M \to N$ une application linéaire. Alors $f(\operatorname{soc} M) \subseteq \operatorname{soc} N$.*

DÉMONSTRATION. En effet, l'image d'un sous-module simple de N est soit nulle, soit égale à un sous-module simple de N. □

COROLLAIRE 2.3. *Soient M un A-module et L un sous-module de M. Alors* $\operatorname{soc} L = L \cap \operatorname{soc} M$. *En particulier,* $\operatorname{soc}(\operatorname{soc} M) = \operatorname{soc} M$.

DÉMONSTRATION. Soit $j : L \to M$ l'injectiou canonique. Il suit de (2.2) que $\operatorname{soc} L \subseteq \operatorname{soc} M$, donc $\operatorname{soc} L \subseteq L \cap \operatorname{soc} M$. D'autre part, $L \cap \operatorname{soc} M$ est un sous-module du module semisimple $\operatorname{soc} M$, donc il est semisimple (VI.6.4). Comme $L \cap \operatorname{soc} M$ est aussi un sous-module de L, on a $L \cap \operatorname{soc} M \subseteq \operatorname{soc} L$. L'égalité s'ensuit. □

LEMME 2.4. *Soit M un A-module. Alors* $\operatorname{soc} M$ *est l'intersection de tous les sous-modules L de M tels que l'inclusion $L \to M$ soit un monomorphisme essentiel.*

DÉMONSTRATION. Soit N cette intersection. Pour tout sous-module simple S de M, et tout sous-module L de M avec l'inclusion $L \to M$ essentielle, on a $S \cap L \neq 0$ donc $S \subseteq L$. Cela moutre que $\operatorname{soc} M \subseteq L$ et donc $\operatorname{soc} M \subseteq N$.

Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que N est semisimple. Soit N' un sous-module de N. Il suit d'une application évidente du lemme de Zorn que l'on peut trouver un sous-module N'' de M maximal pour la propriété

$N' \cap N'' = 0$. Alors $N' + N'' = N' \oplus N''$ est un sous-module de M, et l'injection canonique $N' \oplus N'' \to M$ est essentielle: en effet, si U est un sous-module non nul de M tel que $U \cap (N' + N'') = 0$, alors $N' \cap (N'' + U) = 0$ ce qui contredit la maximalité de N''. Par conséquent $N' \oplus N'' \supseteq N \supseteq N'$ et, par la loi modulaire (II.1.4):

$$N = N \cap (N' \oplus N'') = N' \oplus (N \cap N'').$$

Ainsi, N' est un facteur direct de N. Il suit de (VI.6.2) que N est semisimple et donc que $N \subseteq \operatorname{soc} M$. □

THÉORÈME 2.5. *Soit M un A-module artinien non nul. Alors* $\operatorname{soc} M$ *est le plus petit sous-module L de M tel que l'inclusion $L \to M$ soit un monomorphisme essentiel.*

DÉMONSTRATION. Il suffit, d'après le lemme, de montrer que $\operatorname{soc} M \neq 0$ et que l'inclusion $\operatorname{soc} M \to M$ est essentielle. Or, l'hypothèse que M est artinien entraîne que $\operatorname{soc} M \neq 0$. D'autre part, soit L un sous-module non nul de M. Alors L est lui-même artinien et donc $\operatorname{soc} L \neq 0$. Par (2.3), $L \cap \operatorname{soc} M \neq 0$. C'est bien l'énoncé. □

THÉORÈME 2.6. *Soit M un A-module artinien non nul. Alors les enveloppes injectives de M et de son socle* $\operatorname{soc} M$ *sont isomorphes.*

DÉMONSTRATION. Notons E l'enveloppe injective de $\operatorname{soc} M$. Il faut montrer que E est isomorphe à l'enveloppe injective de M et pour cela il suffit, par (IV.4.6) de montrer qu'il existe un monomorphisme essentiel $M \to E$. On considère le diagramme à ligne exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{soc} M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

où i, j sont les inclusions canoniques. Comme E est injectif, il existe $f : M \to E$ tel que $fj = i$. Comme i est un monomorphisme et j un monomorphisme essentiel, il vient que f est un monomorphisme. Comme, d'autre part, $i = fj$ est un monomorphisme essentiel, f est aussi essentiel (par (IV.4.1)), ce qui achève la démonstration. □

3. Radical d'une algèbre.

LEMME 3.1. *Soit A une K-algèbre non nulle. Alors* $\operatorname{rad} A_A$ *est un idéal bilatère propre de A.*

DÉMONSTRATION. Soit $a \in A$. Alors $f_a : x \mapsto ax$ est une application linéaire $A_A \to A_A$. Par (1.2), on a

$$a(\operatorname{rad} A_A) = f_a(\operatorname{rad} A_A) \subseteq \operatorname{rad} A_A.$$

Donc $\operatorname{rad} A_A$ est un idéal bilatère de A. D'autre part, A_A étant un A-module cyclique (donc de type fini), il existe, par (II.1.6), un idéal à droite maximal M_A. Comme $\operatorname{rad} A_A \subseteq M_A \subsetneq A_A$, on a que $\operatorname{rad} A_A$ est propre. □

DÉFINITION. Le *radical (de Jacobson)* de l'algèbre A est l'idéal bilatère $J = \operatorname{rad} A_A$.

Par exemple, si K est un corps, et $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$, il est facile de montrer (par exemple à l'aide de l'exercice (II.2)) que les idéaux à droite maximaux sont $\left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & 0 \end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$. Par conséquent, J est leur intersection, égale à l'idéal bilatère $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Il est important de remarquer que, même si on a montré que J est un idéal bilatère, il est défini par le biais de la structure de A-module à droite de A: il faut donc vérifier si cette définition est symétrique.

THÉORÈME 3.2. *Soit A une K-algèbre de radical J. Alors $a \in J$ si et seulement si $1 - ax$ admet un inverse à droite pour tout $x \in A$.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. Supposons $a \in J$. Alors, si $x \in A$ et $1 - ax$ n'admet pas d'inverse à droite, le sous-module $(1 - ax)A$ de A_A est propre. Comme il est cyclique, il existe, par (II.1.6) un idéal à droite maximal M_A tel que $(1 - ax)A \subseteq M_A \subsetneq A_A$. Comme $a \in J$, on a $a \in M$ donc $ax \in M$ et alors $1 = (1 - ax) + ax \in M$, une contradiction.

Suffisance. Soit $a \in A$ tel que $1 - ax$ est inversible à droite pour tout $x \in A$. On veut montrer que a appartient à tout idéal à droite maximal de A. Si ce n'est pas le cas, il existe un idéal à droite maximal M de A tel que $a \notin M$. Comme M est maximal, $M + aA = A$ donc il existe $x \in A$ tel que $1 - ax \in M$. Mais $1 - ax$ est inversible à droite, donc $1 \in M$, une contradiction. □

COROLLAIRE 3.3. *Soit A une K-algèbre de radical J. Alors J est le plus grand idéal bilatère I de A tel que $1 - x$ soit inversible pour tout $x \in I$.*

DÉMONSTRATION. Commençons par prouver que si $x \in J$, alors $1 - x$ est inversible. Il suit de (3.2) qu'il existe $y \in A$ tel que $(1 - x)y = 1$. Donc $z = 1 - y = -xy \in J$ donne, toujours par (3.2), que $1 - z$ est inversible à droite. Donc il existe $y' \in A$ tel que $1 = (1 - z)y' = yy'$. Comme y admet uu inverse à droite et un inverse à gauche, ces deux inverses sont égaux, y est inversible et son inverse $1 - x = y^{-1}$ l'est aussi.

Montrons maintenant que J est le plus grand idéal bilatère satisfaisant cette condition. Soient en effet I un idéal satisfaisant cette condition et $a \in I$. Alors $ax \in I$ pour tout $x \in A$ et donc $1 - ax$ est inversible. Par (3.2), on a $a \in J$. On a prouvé que $I \subseteq J$. □

COROLLAIRE 3.4. $\operatorname{rad}({}_A A) = \operatorname{rad}(A_A)$.

DÉMONSTRATION. En effet, la condition de (3.3) est symétrique. □

Un élément $x \in A$ est dit *nilpotent* s'il existe un entier positif m tel que $x^m = 0$. Un idéal I de A est dit *nil* si chaque élément de I est nilpotent.

COROLLAIRE 3.5. *Tout idéal nil de A est contenu dans le radical J.*

DÉMONSTRATION. Soit m tel que $x^m = 0$. Alors $1 - x$ est inversible car $(1 - x)(1 + x + \cdots + x^{m-1}) = 1$. On applique (3.3). □

Notons qu'il ne s'ensuit pas nécessairement que J est lui-même un idéal nil. Nous montrerons néanmoins que c'est le cas si A est artinienne (voir (4.7) plus bas). D'autre part, il ne s'ensuit pas non plus que tout élément nilpotent de A appartient à J: en effet, il peut exister des éléments nilpotents qui n'appartienneut à aucun idéal nil. On en verra un exemple à la section suivante.

4. Modules artiniens et algèbres artiniennes.

THÉORÈME 4.1. *Soit M_A un A-module. Alors M_A est semisimple et de longueur finie si et seulement s'il est artinien et sans radical.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. Tout module de longueur finie est artinien par (VI.5.2). D'autre part, si $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ avec chaque S_λ simple, on a que, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, le sous-module $N_\lambda = \bigoplus_{\mu\neq\lambda} S_\mu$ de M est maximal. Donc $\operatorname{rad} M \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = 0$.

Suffisance. Supposons M artinien tel que $\operatorname{rad} M = 0$. On peut supposer $M \neq 0$. Il existe un ensemble non vide $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de sous-modules maximaux tel que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = 0$. Comme M est artinien, il existe un sous-module $N_1 \cap \cdots \cap N_t$ minimal dans la famille des intersections finies des N_λ. On affirme que ce sous-module minimal est nul. Si ce n'est pas le cas, il existe N_λ tel que $N_1 \cap \cdots \cap N_t \not\subseteq N_\lambda$ (puisque si $N_1 \cap \cdots \cap N_t \subseteq N_\lambda$ pour tout λ, alors $N_1 \cap \cdots \cap N_t \subseteq \bigcap_\lambda N_\lambda = 0$), d'où la contradiction $N_1 \cap \cdots \cap N_t \cap N_\lambda \subsetneqq N_1 \cap \cdots \cap N_t$. Cela montre bien que $N_1 \cap \cdots \cap N_t = 0$. Définissons maintenant $f : M \to \bigoplus_{i=1}^{t}(M/N_i)$ par $x \mapsto (x + N_i)_{i=1}^{t}$. Il est clair que $\operatorname{Ker} f = \bigcap_{i=1}^{t} N_i = 0$. Donc M est isomorphe à un sous-module du module semisimple de longueur finie $\bigoplus_{i=1}^{t}(M/N_i)$: il est donc lui-même semisimple et de longueur finie. □

COROLLAIRE 4.2. *Soit M un A-module artinien. Alors $M/\operatorname{rad} M$ est un A-module semisimple de longueur finie.*

DÉMONSTRATION. Ce quotient est en effet artinien et, par (1.3), on a

$$\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad} M) = 0. \qquad \square$$

Nous avons montré que le radical d'un module artinien en est le plus petit sous-module tel que le quotient soit semisimple et de longueur finie. Nous verrons maintenant que le quotient d'une algèbre artinienne par son radical est semisimple. En effet, soit A une K-algèbre de radical J. On considère l'algèbre quotient $\overline{A} = A/J$. Le lemme suivant est un cas particulier de (III.6.1).

LEMME 4.3. *Tout A-module simple S_A admet une structure naturelle de $\overline{A}$-module simple et réciproquement.*

DÉMONSTRATION. Soit S_A un A-module simple. Pour $x \in S$ et $\overline{a} = a+J \in \overline{A}$, on pose $x\overline{a} = xa$. Cette définition n'est pas ambigüe: en effet, il faut montrer que $xJ = 0$, or $f_x : A_A \to S_A$ définie par $a \mapsto xa$ (pour $a \in A$) est A-linéaire et $J \subseteq \operatorname{Ker} f_x$ donne l'énoncé. Réciproquement, si S est un $\overline{A}$-module, il est naturellement un A-module via la projection canonique $A \to \overline{A}$ (voir (III.6)). Il suit de (III.6.1) que si S est un $\overline{A}$-module simple, alors S est aussi un A-module simple. Il reste à montrer que si S est un A-module simple, il est également simple en tant que $\overline{A}$-module: soit en effet $S' \subseteq S$ un sous-$\overline{A}$-module de S, alors S' est un sous-A-module de S (la $\overline{A}$-structure de S' étant induite de la projection canonique $A \to \overline{A}$). Donc $S' = 0$ ou $S' = S$. □

Il suit du lemme que tout A-module semisimple admet une structure naturelle de $\overline{A}$-module semisimple et réciproquement.

PROPOSITION 4.4. *Soit A une K-algèbre artinienne à droite, alors $\overline{A}$ est une K-algèbre semisimple.*

DÉMONSTRATION. $\overline{A}_A = A_A/J_A$ est un A-module artinien et $\operatorname{rad}(A/J) = 0$. Donc $\overline{A}_A$ est un A-module semisimple par (4.1). Par (4.3), $\overline{A}_{\overline{A}}$ est un $\overline{A}$-module semisimple, et en outre, $\overline{A}_{\overline{A}}$ et $\overline{A}_A$ ont les mêmes sous-modules. Il s'ensuit qne $\overline{A}_{\overline{A}}$ est un $\overline{A}$-module artinien et en outre $\operatorname{rad}(\overline{A}_{\overline{A}}) = 0$. On applique encore (4.1). □

Au vu de (VI.5.2) et (VI.5.3), la conséquence suivante de (4.4) s'avère d'une importance primordiale pour la construction des modules sur une algèbre artinienne.

COROLLAIRE 4.5. *Soit A une K-algèbre artinienne à droite. Alors A n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de A-modules simples.*

DÉMONSTRATION. Cela suit de (4.3), (4.4) et du fait que, par (VI.7.8), une algèbre semisimple n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de modules simples. □

On déduit aussi de (4.4) un calcul explicite du radical d'un module sur une algèbre artinienne.

THÉORÈME 4.6. *Soient A une K-algèbre artinienne à droite et M un A-module. Alors* $\operatorname{rad} M = MJ$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in M$, l'application $f_x : a \mapsto xa$ (où $a \in A$) est un morphisme $A_A \to M_A$. Donc $x(\operatorname{rad} A) = f_x(\operatorname{rad} A) \subseteq \operatorname{rad} M$. Par conséquent $MJ \subseteq \operatorname{rad} M$.

Le module quotient $\overline{M} = M/MJ$ est annulé par J donc est un $\overline{A}$-module. Comme $\overline{A}$ est une algèbre semisimple par (4.4), $\overline{M}$ est un $\overline{A}$-module semisimple et, pour tout $\overline{x} = x+MJ \in \overline{M}$ tel que $x \notin MJ$, il existe $f : \overline{M} \to S$ avec S simple tel que $f(\overline{x}) \neq 0$. Composant f avec la projection canonique $p : M \to \overline{M}$, on a

$fp(x) = f(\overline{x}) \neq 0$. Donc, par (1.1), $x \notin \operatorname{rad} M$. Cela montre que $\operatorname{rad} M \subseteq MJ$. $\square$

Un idéal bilatère I d'une algèbre A est dit *nilpotent* s'il existe $n > 0$ tel que $I^n = 0$. Il est clair que tout élément x d'un tel idéal I est lui-même nilpotent, et donc tout idéal nilpotent est aussi nil. On a la caractérisation suivante du radical d'une algèbre artinienne.

THÉORÈME 4.7. *Soit A une K-algèbre artinienne à droite. Alors $J = \operatorname{rad} A_A$ est le plus grand idéal bilatère nilpotent de A.*

DÉMONSTRATION. Il suit de (3.5) que tout idéal nilpotent de A est contenu dans le radical. Il suffit donc de montrer que J est lui-même nilpotent. La suite $J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \cdots$ étant décroissante, il existe n tel que $J^n = J^{n+1}$. Supposons $J^n \neq 0$. L'ensemble $\mathcal{M}$ des idéaux à droite $M \neq 0$ de A tels que $MJ = M$ est non vide, puisque $J^n \in \mathcal{M}$. Donc $\mathcal{M}$ admet un élément minimal M. Comme $M = MJ = \cdots = MJ^n$, il existe $x \in M$ tel que $xJ^n \neq 0$. On a que xJ^n est un idéal à droite de A contenu dans M (puisque $x \in M$) et tel que $(xJ^n)J = xJ^{n+1} = xJ^n$. La minimalité de M implique donc que $M = xJ^n \subseteq xA \subseteq M$. Donc $M = xA$ est de type fini et (1.5) avec (4.6) donnent la contradiction $0 \neq M = MJ = \operatorname{rad} M$. $\square$

Il suit du théorème que tout élément du radical d'une algèbre artinienne est nilpotent. La réciproque, par contre, est fausse: il existe des éléments nilpotents qui n'appartiennent pas au radical. Par exemple, pour tout corps (gauche) C et tout entier $n > 1$, $M_n(C)$ a plusieurs éléments nilpotents (par exemple, les $\mathbf{e}_{ij}$ avec $i \neq j$) mais, $M_n(C)$ étant simple, on a $\operatorname{rad} M_n(C) = 0$.

COROLLAIRE 4.8. *Le radical d'une algèbre artinienne à droite A est l'unique idéal nil I tel que A/I soit une algèbre semisimple.*

DÉMONSTRATION. On sait que $J = \operatorname{rad} A$ a ces propriétés. Réciproquement, soit I un idéal nil tel que A/I est semisimple. Par (3.5), on a $I \subseteq J$. Comme J est nilpotent, l'idéal J/I de A/I l'est aussi. Par (4.7), $J/I \subseteq \operatorname{rad}(A/I)$. Or A/I est semisimple, donc sans radical (par (4.1)) et $J/I = 0$. Cela moutre que $I = J$. $\square$

La caractérisatiou que nous venons de prouver est particulièrement facile à appliquer. Par exemple, si K est un corps, et $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$, alors A est artinienne (car de K-dimension finie). On voit de suite que $B = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{smallmatrix}\right]$ est un quotient de A et est semisimple (en effet, $B \xrightarrow{\sim} K \times K$). D'autre part, le noyau de la surjection évidente $A \to B$, c'est-à-dire l'idéal bilatère $J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{smallmatrix}\right]$ est nil. Par conséquent J est le radical de A.

COROLLAIRE 4.9. *Pour tout idéal bilatère I d'une algèbre artinienne à droite A, on a* $\operatorname{rad}(A/I) = (I + J)/I$.

DÉMONSTRATION. Comme J est nilpotent, $(I+J)/I$ l'est aussi. D'autre part, on a

$$\frac{A/I}{(I+J)/I} \xrightarrow{\sim} \frac{A}{I+J} \xrightarrow{\sim} \frac{A/J}{(I+J)/J}.$$

Comme A/J est une K-algèbre semisimple, le dernier quotient l'est aussi. On peut donc appliquer (4.8). □

Une conséquence remarquable de la théorie du radical est que toute algèbre artinienne est aussi noethérienne. Cela suit du théorème suivant.

THÉORÈME 4.10 (DE HOPKINS-LEVITSKI). *Soit A une K-algèbre artinienne à droite. Si M_A est un A-module artinien, alors M est noethérien.*

DÉMONSTRATION. Comme J est nilpotent, il existe un plus petit n tel que $MJ^n = 0$. On prouve le résultat par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors $M = MA = MJ^0 = 0$ et le module nul est noethérien. Si $n = 1$, la condition $MJ = 0$ entraîne que M est un A/J-module, donc est semisimple (puisque, par (4.4), $\overline{A} = A/J$ est une K-algèbre semisimple). Donc $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ avec les S_λ simples. On affirme que Λ est un ensemble fini: en effet, si ce n'est pas le cas, il existe une suite infinie de sous-ensembles de Λ de la forme $\Lambda = \Lambda_0 \supsetneqq \Lambda_1 \supsetneqq \Lambda_2 \supsetneqq \cdots$ et par suite $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} S_\lambda \supsetneqq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1} S_\lambda \supsetneqq \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_2} S_\lambda \supsetneqq \cdots$ donne une suite décroissante infinie de sous-modules de M, ce qui contredit l'hypothèse que M est artinien. Cela montre que M est de longueur finie et douc noethérien (VI.5.2). Si $n > 1$, soit $N = MJ^{n-1} \subseteq M$. Alors N est artinien et $NJ = 0$ (donc le cas $n = 1$ donne que N est noethérien). D'autre part, M/N est artinien et $(M/N)J^{n-1} = 0$. L'hypothèse de récurrence donne M/N noethérien. Enfin la suite exacte courte $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ et (VI.1.3) donnent qne M est noethérien. □

COROLLAIRE 4.11. *Si A est artinienne à droite, alors A est noethérienne à droite.* □

Nous sommes maintenant en mesure de tenir une promesse faite en (VI.5).

COROLLAIRE 4.12. *Si A est artinienne à droite et M_A un A-module, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *M est artinien.*
(b) *M est noethérien.*
(c) *M est de type fini.*
(d) *M est de longueur finie.*

DÉMONSTRATION. Il suit de (4.10) que (a) implique (b), et de (VI.1.5) que (b) implique (c). Pour montrer que (c) implique (a), on observe que l'hypothèse que M est de type fini entraîne, par (III.3.6), l'existence d'un épimorphisme $A_A^{(m)} \to M_A$ avec $m > 0$ un entier. Comme A_A est artinien, M l'est aussi, par (VI.1.3). Enfin, (a) et (b) équivalent à (d) par (VI.5.2). □

5. Le radical d'une catégorie K-linéaire.

Nous montrerons maintenant comment la définition du radical d'une algèbre permet d'arriver à celle de radical d'une catégorie. Rappelons que le radical doit être un idéal bilatère. Si la définition originale du radical en section 1 ne se généralise pas de manière évidente, la caractérisation de (3.1) donne immédiatement la définition suivante.

DÉFINITION. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie K-linéaire. Le *radical* $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ est défini par la donnée, pour chaque paire (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, de l'ensemble

$$\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \mid 1_X - fg \text{ est inversible à droite} \\ \text{pour tout } g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)\}.$$

Nous souhaitons évidemment prouver que $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}$ est un idéal de $\mathcal{C}$. N'ayant pas à notre disposition les notions utilisées plus haut, nous utiliserons des manipulations arithmétiques simples. Commençons par le lemme suivant, inspiré de (3.3).

LEMME 5.1. *Si, dans une catégorie K-linéaire, le morphisme f est tel que $1_X - fg$ est inversible à droite pour tout g, alors $1_X - fg$ est inversible pour tout g.*

DÉMONSTRATION. Fixons-nous un morphisme g. Par hypothèse, il existe h tel que $(1 - fg)h = 1$. Alors $h = 1 + fgh = 1 - fg(-h)$ admet à son tour un inverse à droite k. Alors $1 = hk = (1 + fgh)k = k + fghk = k + fg$. Donc $k = 1 - fg$. Mais alors $hk = 1$ se lit $h(1 - fg) = 1$ et h est aussi un inverse à gauche de $1 - fg$. □

La réciproque du lemme étant évidente, on en déduit que $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est égal à l'ensemble des $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ tels que $1_X - fg$ est inversible pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

PROPOSITION 5.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie K-linéaire. Alors $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{C}$.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que $0 \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et que $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $\alpha \in K$ impliquent $\alpha f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Montrons que $f_1, f_2 \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ impliquent $f_1 + f_2 \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Pour cela, il faut montrer que, pour tout $g : Y \to X$, le morphisme $1_X - (f_1 + f_2)g$ est inversible à droite.

Comme $1_X - f_1 g$ admet un inverse (à droite) h_1 et $1_X - f_2 g h_1$ admet un inverse (à droite) h_2, on peut cousidérer $h_1 h_2 : X \to X$. On affirme que c'est l'iuverse (à droite) de $1_X - (f_1 + f_2)g$. En effet, $(1 - f_1 g)h_1 = 1$ implique $(1 - f_1 g)h_1 h_2 = h_2$ c'est-à-dire $h_1 h_2 - h_2 = f_1 g h_1 h_2$. D'autre part, $(1 - f_2 g h_1)h_2 = 1$ donne $h_2 - 1 = f_2 g h_1 h_2$. Donc l'énoncé suit de:

$$\begin{aligned} (1 - (f_1 + f_2)g)h_1 h_2 &= h_1 h_2 - f_1 g h_1 h_2 - f_2 g h_1 h_2 \\ &= h_1 h_2 - (h_1 h_2 - h_2) - (h_2 - 1) = 1. \end{aligned}$$

Enfin, soit $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Il est clair que pour tout morphisme $u : W \to Y$, on a $1 - (fu)g = 1 - f(ug)$ inversible à droite. Donc $fu \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(W,Y)$. Soit

$v : Y \to Z$. On doit montrer que $vf \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ et donc que, pour tout morphisme g, on a $1 - (vf)g$ inversible à droite. Or, $1 - f(gv)$ est inversible à droite, donc inversible, et il existe h tel que

$$h(1 - f(gv)) = 1 = (1 - f(gv))h.$$

Alors $1 + vhfg$ est l'inverse à droite de $1 - vfg$: en effet

$$(1 - vfg)(1 + vhfg) = 1 + vhfg - vfg - vfgvhfg.$$

Or $(1 - fgv)h = 1$ donne $fgvh = h - 1$ d'où

$$(1 - vfg)(1 + vhfg) = 1 + vhfg - vfg - v(h - 1)fg = 1. \quad \square$$

LEMME 5.3. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie K-linéaire, $X_1, \dots, X_m$ et $Y_1, \dots, Y_n$ des objets de $\mathcal{C}$. Si $f = [f_{ij}] : \bigoplus_{i=1}^{m} X_i \to \bigoplus_{j=1}^{n} Y_j$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, alors $f \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}\left(\bigoplus_{i=1}^{m} X_i, \bigoplus_{j=1}^{n} Y_j\right)$ si et seulement si $f_{ji} \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j)$ pour tous i, j.*

DÉMONSTRATION. Notons p'_i, q'_i respectivement les projections et injections canoniques associées à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{m} X_i$ et p_j, q_j respectivement les projections et injections canoniques associées à la somme directe $\bigoplus_{j=1}^{n} Y_j$. L'énoncé suit alors du fait que $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}$ est un idéal bilatère et des équations $f_{ji} = p_j f q'_i$ et $f = \left(\sum_{j=1}^{n} q_j p_j\right) f \left(\sum_{i=1}^{m} q'_i p'_i\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} q_j f_{ji} p'_i$. $\square$

De même que l'on définit des puissances d'un idéal d'une algèbre, on peut utiliser la définition précédente pour définir les puissances du radical d'une catégorie K-linéaire. Soient X, Y deux objets de la catégorie K-linéaire $\mathcal{C}$ et $m \geq 2$, on définit $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}^{m}(X, Y)$ comme étant le sous-K-module de $\mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ formé de toutes les combinaisons K-linéaires de morphismes $f : X \to Y$ admettant une factorisation de la forme $X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{m-1} \xrightarrow{f_m} X_m = Y$ avec $f_i \in \mathrm{rad}_{\mathcal{C}}(X_{i-1}, X_i)$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

Une récurrence immédiate sur m donne que ce sont des idéaux bilatères de $\mathcal{C}$.

6. Modules indécomposables.

Un module indécomposable en est un qui ne se laisse pas décomposer en somme directe. Nous montrerons que si M est un module artinien et noethérien, son indécomposabilité s'exprime par une propriété de son algèbre d'endomorphismes. En outre, tout module artinien et noethérien se décompose uniquement (à isomorphisme près) en somme directe finie de modules indécomposables.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. Un A-module M_A est dit *indécomposable* si $M \neq 0$ et $M = M_1 \oplus M_2$ entraîne $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$. Sinon, M est dit *décomposable.*

Par exemple, tout module simple est indécomposable. Pour un nombre premier p et un $n > 0$, le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_{p^n}$ est indécomposable, mais n'est simple que pour $n = 1$. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_{15} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$ est décomposable. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ est indécomposable: en effet, tout sous-module non nul de $\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $0 \neq a \in \mathbb{N}$, et, pour $0 \neq a, b \in \mathbb{N}$ on a $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \supseteq ab\mathbb{Z} \neq 0$.

PROPOSITION 6.1. *Soit M_A un module artinien ou noethérien. Alors M se décompose en somme directe finie de A-modules indécomposables.*

DÉMONSTRATION. Si $M = 0$, il n'y a rien à prouver (M est égal à la somme directe vide). Si $M \neq 0$ est indécomposable, il n'y a rien à prouver non plus. Sinon, M admet au moins un facteur direct propre. Si M est artinien, alors M admet un facteur direct minimal non nul N_1: un tel facteur direct minimal non nul est évidemment indécomposable. Si M est noethérien, il admet un facteur direct maximal dont le complément est alors minimal non nul N_1, et par conséquent indécomposable. Une récurrence immédiate donne alors

$$M = N_1 \oplus M_1 = N_1 \oplus N_2 \oplus M_2 = \cdots = (N_1 \oplus \cdots \oplus N_i) \oplus M_i$$

avec les N_j indécomposables et $M_j = N_{j+1} \oplus M_{j+1}$ pour chaque j. Si M est artinien, on considère la suite décroissante $M \supsetneqq M_1 \supsetneqq M_2 \supsetneqq \cdots$: il existe $m > 0$ tel que $M_m = 0$ et alors $M = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$. Si M est noethérien, on considère la suite croissante $0 \subsetneqq N_1 \subsetneqq N_1 \oplus N_2 \subsetneqq \cdots$ et on trouve encore un $m > 0$ tel que $M = \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$. □

COROLLAIRE 6.2. *Soit A une K-algèbre artinienne. Tout module de type fini se décompose en somme directe finie de A-modules indécomposables.*

DÉMONSTRATION. Cela suit de (6.1) et (4.12). □

Ayant prouvé l'existence de décompositions d'un module artinien ou noethérien en modules indécomposables, il reste à en étudier l'unicité. Pour cela, on essaie d'abord de trouver un critère permettant de vérifier si un module est indécomposable ou pas. Rappelons qu'on a prouvé qu'il existe une bijection entre décompositions d'une algèbre en produit direct et décompositions de son identité en idempotents centraux deux à deux orthogonaux, et qu'une algèbre est connexe (indécomposable) si et seulement si son identité est un idempotent centralement primitif. On a des résultats semblables sur les modules.

PROPOSITION 6.3. *Il existe une bijection entre décompositions d'un A-module M en somme directe finie et décompositions de l'identité de* $\operatorname{End} M$ *en somme d'idempotents orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. En effet, à $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$ correspond la décomposition $1_M = q_1p_1 + \cdots q_tp_t$ où $p_i : M \to M_i$ et $q_i : M_i \to M$ (pour $1 \leq i \leq t$) désignent respectivement la projection et l'injection canoniques. Comme, pour chaque i, $e_i = q_ip_i$ est un idempotent, et $e_ie_j = 0$ pour $i \neq j$, on a bien une décomposition de 1_M en somme d'idempotents orthogonaux.

Réciproquement, si $1_M = e_1 + \cdots + e_t$ est une décomposition de 1_M en somme d'idempotents orthogonaux, posons $M_i = \operatorname{Im} e_i$. Chaque M_i est un sous-module de M, et on veut montrer que $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$. Pour $x \in M$, on a

$$x = 1_M(x) = (e_1 + \cdots + e_t)(x) = e_1(x) + \cdots + e_t(x)$$

et donc $x \in \sum_{i=1}^{t} M_i$, ce qui donne bien $M = \sum_{i=1}^{t} M_i$. Pour montrer l'unicité de l'écriture précédente de x, supposons que $x = x_1 + \cdots + x_t$ où $x_i \in M_i$ pour chaque $1 \leq i \leq t$. Alors il existe des $x'_i \in M$ tels que $x_i = e_i(x'_i)$ pour chaque i, et donc $e_i(x) = e_i\left(\sum_{j=1}^{t} x_j\right) = e_i\left(\sum_{j=1}^{t} e_j(x'_j)\right) = \sum_{j=1}^{t} e_ie_j(x'_j) = e_i(x'_i) = x_i$. □

COROLLAIRE 6.4. *Un A-module M est indécomposable si et seulement si les seuls idempotents de* $\operatorname{End} M$ *sont* 0 *et* 1_M.

DÉMONSTRATION. En effet, si $e \in \operatorname{End} M$ est un idempotent, alors $1_M = e + (1_M - e)$ est une décomposition de 1_M en idempotents orthogonaux. Cette décomposition est triviale si et seulement si $e = 1_M$ ou $e = 0$. □

Les résultats précédents donnent l'idée de caractériser l'indécomposabilité d'un module par des propriétés de son algèbre d'endomorphismes.

DÉFINITION. Une K-algèbre A est dite *locale* si elle n'a qu'un seul idéal à droite maximal.

En particulier, cet unique idéal à droite maximal doit égaler le radical. Donc une algèbre est locale si et seulement si son radical est un idéal à droite maximal. Observons que, si A est locale, alors $0 \neq 1$ et donc $A \neq 0$. Par exemple, tout corps est trivialement une algèbre locale.

THÉORÈME 6.5. *Soit A une K-algèbre, de radical J. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est locale.*
(b) *L'ensemble des éléments non inversibles de A forme un idéal bilatère.*
(c) *Pour chaque $x \in A$, au moins un des éléments x ou $1 - x$ est inversible.*
(d) *A/J est un corps.*

DÉMONSTRATION. (a) implique (b). Comme A est locale, son unique idéal à droite maximal est J. Si $x \in J$, alors $xA \subseteq J \subsetneq A$ et donc x n'est pas inversible. Réciproquement, si x n'est pas inversible, alors $xA \neq A$ donne $xA \subseteq J$ et $x \in J$. Par conséquent, l'ensemble des éléments non inversibles de A est égal à l'idéal bilatère J.

(b) implique (c). En effet, si ni x ni $1-x$ n'est inversible, (b) donne que $1 = x + (1-x)$ n'est pas inversible non plus, une absurdité.

(c) implique (d). Il suffit de montrer que, si $x \notin J$, alors x est inversible. Comme $x \notin J$, il suit de (3.2) (et de sa version "à gauche") qu'il existe $a, b \in A$ tels que $1 - xa$ et $1 - bx$ ne sont pas inversibles. L'hypothèse donne que xa et bx sont inversibles: il existe $a', b' \in A$ tels que $x(aa') = 1$ et $(b'b)x = 1$. Donc x est inversible.

(d) implique (a). Comme le corps A/J n'a pas d'idéaux à droite non triviaux, l'idéal à droite J de A est maximal, donc est le seul idéal à droite maximal de A. □

COROLLAIRE 6.6. *Soient A une K-algèbre et M_A un A-module tel que* $\operatorname{End} M$ *est locale. Alors les seuls idempotents de* $\operatorname{End} M$ *sont* 0 *et* 1_M. *En particulier* M *est indécomposable.*

DÉMONSTRATION. Soit $e \in \operatorname{End} M$ un idempotent. Alors e ou $1-e$ est inversible. Dans le premier cas, $e^2 = e$ donne $e = 1_M$. Dans le second, $e - e^2 = 0$ donne $e = 0$. □

Notre objectif sera de montrer que la réciproque de (6.6) est vraie sous certaines hypothèses. Le lemme suivant généralise une propriété bien connue des espaces vectoriels de dimension finie.

LEMME 6.7. *Soient M un A-module et $f \in \operatorname{End} M$.*

(a) *Si M est noethérien et f est un épimorphisme, alors f est un automorphisme.*
(b) *Si M est artinien et f est un monomorphisme, alors f est un automorphisme.*

DÉMONSTRATION. (a) On considère la suite croissante de sous-modules de M définie par $0 \subseteq \operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \subseteq \cdots$. Comme M est noethérien, il existe $n > 0$ tel que $\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^{n+1}$. Comme f est surjective, f^n l'est aussi et donc on a $\operatorname{Ker} f = f^n(f^n)^{-1}(\operatorname{Ker} f) = f^n(f^{n+1})^{-1}(0) = f^n[\operatorname{Ker} f^{n+1}] = f^n[\operatorname{Ker} f^n] = 0$.

(b) On considère la suite décroissante de sous-modules de M définie par $M \supseteq f(M) \supseteq f^2(M) \supseteq \cdots$. Comme M est artinien, il existe n tel que $f^n(M) = f^{n+1}(M)$. Si $x \in M$, il existe $y \in M$ tel que $f^n(x) = f^{n+1}(y)$. Comme f est injective, f^n l'est aussi et $x = f(y)$. Cela montre que f est surjective. □

Un premier corollaire inattendu de (6.7) est le suivant.

COROLLAIRE 6.8. *Soit A une K-algèbre noethérienne. Alors $A_A^{(m)} \xrightarrow{\sim} A_A^{(n)}$ si et seulement si $m = n$. En outre, tout ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$ qui engendre $A_A^{(n)}$ en est une base.*

DÉMONSTRATION. Supposons en effet $m > n$ et soient $\{e_1, \ldots, e_m\}$ et $\{f_1, \ldots, f_n\}$ deux bases du A-module libre $L = A_A^{(m)} \xrightarrow{\sim} A_A^{(n)}$. Il existe un épimorphisme $f : L \to L$ défini par $e_i \mapsto f_i$ pour $1 \le i \le n$. Évidemment, f est de noyau non nul (et engendré par $\{e_{n+1}, \ldots, e_m\}$). Mais d'autre part, $L = A_A^{(m)}$ est un module de type fini sur une algèbre noethérienne, donc L_A est noethérien. Cela contredit (6.7). Donc $m = n$. La réciproque est triviale.

Pour la seconde partie, soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de $L = A_A^{(n)}$. On définit un épimorphisme $f : L \to L$ par $e_i \mapsto x_i$ (pour $1 \leq i \leq n$). Il suit encore de (6.7) que f est un isomorphisme. L'ensemble donné est donc une base. $\square$

Ainsi, le nombre d'éléments d'une base d'un A-module libre de type fini sur une algèbre noethérienne est uniquement déterminé: on l'appelle *rang* de ce module. Rappelons par exemple que $\mathbb{Z}$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre noethérienne, on parlera ainsi de rang d'un groupe abélien libre.

LEMME 6.9 (DE FITTING). *Soient M_A un A-module artinien et noethérien et $f \in \operatorname{End} M_A$. Il existe $n > 0$ tel que*

$$M = \operatorname{Im} f^n \oplus \operatorname{Ker} f^n.$$

DÉMONSTRATION. Comme M est artinien, il existe un $n > 0$ tel que la suite $M \supseteq f(M) \supseteq f^2(M) \supseteq \cdots$ devienne stationnaire après n étapes. Alors $f^n(M) = f^{2n}(M)$. Donc f^n est un endomorphisme surjectif du module noethérien $f^n(M)$. Par (6.7), f^n est un automorphisme de $f^n(M)$. Donc $f^n(M) \cap \operatorname{Ker} f^n = 0$. Soit $x \in M$. Il existe $y \in M$ tel qne $f^n(x) = f^{2n}(y)$. Donc $f^n(x - f^n(y)) = 0$. En écrivant $x = f^n(y) + (x - f^n(y))$ on voit bien que $x \in f^n(M) + \operatorname{Ker} f^n$. L'énoncé s'ensuit. $\square$

COROLLAIRE 6.10. *Si M est un module artinien et noethérien qui est indécomposable, tout endomorphisme de M est nilpotent ou est un automorphisme.*

DÉMONSTRATION. Si M est indécomposable, alors $\operatorname{Im} f^n = 0$ ou $\operatorname{Ker} f^n = 0$. Dans le premier cas, f est nilpotent. Dans le second, f^n est un automorphisme, donc f l'est aussi. $\square$

La caractérisation que nous cherchions est la suivante.

LEMME 6.11. *Si M_A est un A-module artinien et noethérien, alors M est indécomposable si et seulement si* $\operatorname{End} M$ *est locale.*

DÉMONSTRATION. Une implication est (6.6), l'autre est (6.5) combiné avec (6.10): en effet, tout endomorphisme de M est soit nilpotent (donc dans le radical de $\operatorname{End} M$) soit inversible. $\square$

COROLLAIRE 6.12. *Soit A une K-algèbre artinienne. Un A-module de type fini M est indécomposable si et seulement si* $\operatorname{End} M$ *est une algèbre locale.*

DÉMONSTRATION. En effet, tout module de type fini snr une algèbre artinienne est artinien et noethérien, par (4.12). On applique alors (6.11). $\square$

Nous montrons maintenant le fameux théorème de décomposition unique, attribué à Remak, Krull, Schmidt et Azumaya.

THÉORÈME 6.13 (DE DÉCOMPOSITION UNIQUE). *Soient A une K-algèbre et M un A-module. Si*

$$M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i = \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$$

où les $\operatorname{End} M_i$ *et les* $\operatorname{End} N_j$ *sont des algèbres locales pour tous i, j, alors $m = n$ et il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, m\}$ telle que $M_i \xrightarrow{\sim} N_{\sigma(i)}$ pour tout $1 \leq i \leq m$.*

DÉMONSTRATION. Par (6.6), les M_i et N_j sont tous indécomposables. On montrera le théorème par récurrence sur m. Si $m = 1$, alors M_1 est indécomposable et il n'y a rien à prouver. Supposons $m > 1$ et posons $M_1' = \bigoplus_{i>1} M_i$. Notons respectivement q, q', p, p' les injections et projections canoniques associées à la décomposition $M = M_1 \oplus M_1'$ et q_j, p_j (où $1 \leq j \leq m$) les injections et projections canoniques associées à la décomposition $M = \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$. On a

$$1_{M_1} = pq = p\left(\sum_{j=1}^{n} q_j p_j\right) q = \sum_{j=1}^{n} p q_j p_j q.$$

Comme $\operatorname{End} M_1$ est locale, il existe j tel que $v = pq_jp_jq$ soit inversible. À une permutation des indices près, on peut supposer $j = 1$. Alors $w = v^{-1}pq_1 : N_1 \to M_1$ est tel que $wp_1q = 1_{M_1}$ et donc $p_1qw \in \operatorname{End} N_1$ est idempotent. Comme $\operatorname{End} N_1$ est locale, il suit de (6.6) que $p_1qw = 0$ ou $p_1qw = 1_{N_1}$. Si $p_1qw = 0$ alors $p_1q = 0$ (car w est un épimorphisme) et c'est absurde, car $v = pq_1p_1q$ est inversible. Donc $p_1qw = 1_{N_1}$ et $f_{11} = p_1q : M_1 \to N_1$ est un isomorphisme. Si on pose $N_1' = \bigoplus_{j>1} N_j$, on peut regarder l'identité 1_M comme un isomorphisme $f : M_1 \oplus M_1' \xrightarrow{\sim} N_1 \oplus N_1'$ sous forme d'une matrice

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

avec $f_{11} : M_1 \to N_1$, $f_{12} : M_1' \to N_1$, $f_{21} : M_1 \to N_1'$, $f_{22} : M_1' \to N_1'$. On sait que f_{11} est un isomorphisme. Le résultat suivra de l'hypothèse de récurrence si ou peut montrer que $M_1' \xrightarrow{\sim} N_1'$. Or, comme f est un isomorphisme, il en est de même de

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -f_{21}f_{11}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -f_{11}^{-1}f_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} - f_{21}f_{11}^{-1}f_{12} \end{bmatrix}.$$

En particulier, $f_{22} - f_{21}f_{11}^{-1}f_{12} : M_1' \to N_1'$ est uu isomorphisme. □

COROLLAIRE 6.14. *Soit M_A un module artinien et noethérien. Il existe une décomposition directe de M de la forme $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$, où chaque M_i est indécomposable. Cette décomposition de M est unique à isomorphisme près.* □

COROLLAIRE 6.15. *Soit A une K-algèbre artinienne. Tout A-module de type fini s'écrit uniquement (à isomorphisme près) en somme directe finie de modules indécomposables.* $\square$

On achève sur une application utile au radical d'une catégorie K-linéaire.

PROPOSITION 6.16. *Soient X, Y deux objets d'une catégorie K-linéaire $\mathcal{C}$ tels que $\operatorname{End}_{\mathcal{C}} X$ et $\operatorname{End}_{\mathcal{C}} Y$ soient des K-algèbres locales. Alors $\operatorname{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est égal à l'ensemble des non-isomorphismes de X dans Y. En particulier, si $X \not\xrightarrow{\sim} Y$, alors $\operatorname{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.*

DÉMONSTRATION. Si $f \in \operatorname{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, il est clair que f n'est pas un isomorphisme, car sinon, il suivrait de la définition du radical de $\mathcal{C}$ que $0 = 1 - ff^{-1}$ est inversible, une absurdité.

Réciproquement, soit $f : X \to Y$ un non-isomorphisme non nul de $\mathcal{C}$. On montrera que $f \in \operatorname{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

On commence par prouver que, pour tout morphisme $g : Y \to X$ de $\mathcal{C}$, l'endomorphisme $fg : Y \to Y$ n'est pas inversible. En effet, si h est tel que $fgh = 1$, alors $u = ghf$ est un idempotent de l'algèbre locale $\operatorname{End}_{\mathcal{C}} X$. Par (6.6), on a $u = 0$ ou $u = 1$. Le premier cas donne la contradiction $1 = 1^2 = (fgh)(fgh) = 0$. Donc $u = 1$ et $ghf = 1$ donne que f est inversible, une contradiction.

Soit $g : Y \to X$ un morphisme. Comme $fg \in \operatorname{End}_{\mathcal{C}} Y$ n'est pas inversible, $1 - fg$ l'est. Par conséquent $f \in \operatorname{rad}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. $\square$

COROLLAIRE 6.17. *Soient A une K-algèbre artinienne et M, N deux A-modules indécomposables de type fini. Alors $\operatorname{rad}(M,N)$ égale l'ensemble des non-isomorphismes de M dans N. En particulier, si $M \not\xrightarrow{\sim} N$, alors $\operatorname{rad}(M,N) = \operatorname{Hom}_A(M,N)$.* $\square$

Exercices du Chapitre VII.

1. Calculer le socle de chacun des $\mathbb{Z}$-modules:
   (i) $\mathbb{Z}$.
   (ii) $\mathbb{Z}_n$.

2. Soient K un corps et $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$.
   (i) Calculer le socle de chacun de A_A et ${}_AA$.
   (ii) Montrer que A a deux modules simples non isomorphes mais que les facteurs directs simples de $\operatorname{soc} A_A$ sont isomorphes.

3. Soit $A = K[t]/\langle t^n \rangle$ (où K est un corps, et $n \geq 1$). Calculer le radical de A et montrer que A est locale.

4. Calculer le radical de chacune des algèbres suivantes
   (i) $\mathbb{Z}$.
   (ii) $T_n(K) = \begin{bmatrix} K & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ K & \cdots & K \end{bmatrix}$, où K est un corps, et $n \geq 1$.
   (iii) $K[t_1, \ldots, t_n]$, où K est un corps, et $n \geq 1$.
   (iv) $K[t]/\langle p \rangle$, où K est un corps, et $p \in K[t]$.
   (v) $\begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 \\ K & K & K & K \end{bmatrix}$, où K est un corps.
   (vi) $\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix}$, où K est un corps.
   (vii) $T_n(K)/\operatorname{rad}^2 T_n(K)$, où K est un corps et $n \geq 1$.

5. Soit A une K-algèbre artinienne de radical J. Montrer que, pour tout idempotent e de A, on a $\operatorname{rad}(eA) = eJ$.

6. Soit A une K-algèbre artinienne. Montrer que $\operatorname{rad} A_A$ est égal à l'intersection des idéaux bilatères maximaux de A.

7. Soit Λ l'extension triviale de l'algèbre A par un bimodule ${}_AM_A$ (voir l'exercice (I.15)). Montrer que $\operatorname{rad} \Lambda = \operatorname{rad} A \oplus M$.

8. Soient A une K-algèbre artinienne et M un A-module. Montrer que $\operatorname{soc} M = \{x \in M \mid x(\operatorname{rad} A) = 0\}$.

9. Soit A une algèbre. Montrer que $\operatorname{rad} M_n(A)$ est l'ensemble des matrices $[a_{ij}]$ telles que $a_{ij} \in \operatorname{rad} A$ pour tous i, j. [Indication: si $\mathbf{a} = [a_{ij}]$, alors $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}_{ki}\mathbf{a}\mathbf{e}_{jk} = \mathbf{1} \cdot a_{ij}$ où $\mathbf{1}$ est la matrice identité), montrer que si $\mathbf{1} \cdot b \in \operatorname{rad} M_n(A)$ alors $b \in \operatorname{rad} A$ et si $b \in \operatorname{rad} A$, alors $\mathbf{e}_{ij} b \in \operatorname{rad} M_n(A)$ pour tous i, j].

10. Soit M un module de type fini sur une algèbre artinienne, de socle simple. Montrer que M est indécomposable.

11. Au moyen du lemme de Fitting (ou autrement), montrer que si A, B sont deux matrices à coefficients dans un corps commutatif, de mêmes dimensions et si AB est égal à la matrice identité I, alors on a aussi $BA = I$.

12. Donner nn exemple d'un $\mathbb{Z}$-module indécomposable M de type fini tel que $\operatorname{End} M$ n'est pas locale.

13. Montrer que, si A est une algèbre locale, alors 0 et 1 sont ses seuls idempotents, puis montrer que la réciproque est fausse.

14. Soit M un groupe abélien. Montrer que:

(a) Si M est sans torsion, alors $\operatorname{soc} M = 0$.
(b) Si M est de torsion, alors $\operatorname{soc} M$ est essentiel dans M.
(c) Si M est divisible, alors $\operatorname{rad} M = M$.

15. Soit A une K-algèbre artinienne. Montrer que son radical J est le plus petit idéal bilatère I de A tel que A/I soit une algèbre semisimple.

16. Soit A une K-algèbre. Montrer que $a \in J$ si et seulement si, pour tout $x \in A$, l'élément $1 - xa$ est inversible à gauche, et si et seulement si, pour tous $x, y \in A$, l'élément $1 - xay$ est inversible.

17. Soit A une K-algèbre artinienne. Montrer que la somme de tous les idéaux nilpotents de A est égale à $J = \operatorname{rad} A$.

18. Soient A une K-algèbre et I un idéal bilatère de A. Montrer que $\operatorname{rad}(A/I) = 0$ implique $\operatorname{rad} A \subseteq I$.

19. Soit A une algèbre artinienue. Montrer que tout idéal nil est nilpotent.

20. Soient M un A-module artinien et uoethérien et $f \in \operatorname{End} M$. Trouver une décomposition directe $M = M' \oplus M''$ telle que la restriction $f|_{M'}$ est nilpotente et la restriction $f|_{M''}$ est inversible.

21. Soient A une algèbre, M un A-module indécomposable tel que $\operatorname{End} M$ soit locale d'idéal maximal I. Montrer que, pour tous module N et morphismes $f : M \to N$, $g : N \to M$ on a $gf \in I$ ou bien M est un facteur direct de N.

22. Soit $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$ un module de type fini sur une algèbre artinienne et N un facteur direct de M. Montrer que si N est indécomposable, alors il existe un i (où $1 \leq i \leq t$) tel que N soit un facteur direct de M_i.

23. Soient A une algèbre, et I un idéal bilatère de A tels que A/I est locale. Montrer que A est locale.

CHAPITRE VIII

Modules projectifs. Équivalences de Morita.

Nous voulons appliquer les résultats du chapitre (VII) au calcul des modules indécomposables projectifs et injectifs de type fini. Dans le cas artinien, il est relativement facile de trouver une expression simple pour les premiers. Quant aux seconds, on supposera qu'on travaille sur une algèbre de dimension finie sur un corps: dans ce cas, la dualité des espaces vectoriels sous-jacents à nos modules permet de décrire une correspondance biunivoque entre modules projectifs et injectifs, et en particulier de calculer explicitement ces derniers. Une autre application des résultats précédents réside dans la caractérisation des équivalences de catégories de modules: elle se fait par le biais de modules projectifs, et elle permet d'associer à chaque algèbre A une algèbre A_b définie à isomorphisme près, qui est la plus petite algèbre telle que les catégories de modules de A et A_b soient équivalentes.

1. Idempotents et projectifs indécomposables.

Soit A une K-algèbre, sans hypothèse supplémentaire pour l'instant. On essaie d'appliquer (VII.6.3) au A-module A_A, en utilisant le fait que $\operatorname{End} A_A \xrightarrow{\sim} A$: il en ressort que les décompositions directes finies de A_A sont en correspondance biunivoque avec les décompositions de l'identité de A de la forme

$$1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

avec $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble d'idempotents orthogonaux. On exprime le fait que $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1$ en disant que l'ensemble d'idempotents orthogonaux $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est *complet*. Une telle décomposition de l'identité induit une décomposition correspondante de A_A de la forme $A_A = e_1A \oplus e_2A \oplus \cdots \oplus e_nA$. On se pose la question quand chacun des facteurs e_iA est indécomposable. On a la très utile proposition suivante (que le lecteur comparera à (II.5.3)).

PROPOSITION 1.1. *Soient $e \in A$ un idempotent et M un A-module. On a un isomorphisme de K-modules, fonctoriel en M*

$$\operatorname{Hom}_A(eA, M) \xrightarrow{\sim} Me.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout morphisme $f : eA \to M$, on a $f(e) = f(e^2) = f(e)e \in Me$. On définit donc $\mathrm{Hom}_A(eA, M) \to Me$ par $f \mapsto f(e)$ (pour $f \in \mathrm{Hom}_A(eA, M)$). Cette application est K-linéaire. On définit sa réciproque par $xe \mapsto f$, où $f : eA \to M$ est donnée par $f(e) = xe$ (pour $x \in M$). On laisse au lecteur le soin de vérifier la fonctorialité. □

COROLLAIRE 1.2. *Soient $e, e' \in A$ deux idempotents, on a un isomorphisme de K-modules* $\mathrm{Hom}_A(eA, e'A) \xrightarrow{\sim} e'Ae$. □

Il est clair que si $e \in A$ est un idempotent, alors le K-module eAe devient une K-algèbre pour la multiplication induite de celle de A. Son identité est e.

COROLLAIRE 1.3. *Soit $e \in A$ un idempotent, on a un isomorphisme de K-algèbres* $\mathrm{End}_A(eA) \xrightarrow{\sim} eAe$. *En outre, si A est artinienne, eAe l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. Pour le premier énoncé, il suffit de montrer que l'application K-linéaire définie dans la démonstration de (1.1) applique la composition des endomorphismes de eA sur la multiplication de eAe, et 1_{eA} sur e, et c'est évident. Pour le second énoncé, il faut montrer que eAe est un eAe-module artinien. Soit donc I un idéal à droite de eAe. Alors IA est évidemment un sous-module de A_A: en effet, $IA \subseteq A_A$. D'autre part, $Ie = I$, puisque e est l'identité de eAe. Donc $IAe = I(eAe) = I$. Cela montre que l'application $I \mapsto IA$ définit une injection du treillis de sous-modules de eAe_{eAe} dans le treillis de sous-modules de A_A. Le second module étant artinieu, il en est de même du premier. □

Nous pouvons revenir à la décomposition directe de A_A. Un idempotent $e \in A$ est dit *primitif* si $e = e' + e''$, avec e', e'' deux idempotents orthogonaux, entraîne $e' = 0$ ou $e'' = 0$. Par exemple, si $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est un ensemble complet d'idempotents orthogonaux ayant un nombre maximal d'éléments, alors chaque e_i est primitif. En fait, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 1.4. *Soient A une K-algèbre artinienne, et $e \in A$ un idempotent. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *eA est indécomposable.*
(b) *e est primitif.*
(c) *eAe est une algèbre locale.*

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (a) et (b) suit des remarques précédentes, celle de (c) et (a) de (1.3) et (VII.6.12). □

Il suit de (1.4) et de (VII.6.1) que, si A est artinienne, alors elle admet une décomposition de la forme

$$A_A = e_1 A \oplus e_2 A \oplus \cdots \oplus e_n A$$

avec chacun des $e_i A$ indécomposable. Une telle décomposition s'appelle *décomposition de Pierce* de A. Observons que chacun des $e_i A$ est un facteur direct du A-module libre A_A, donc est projectif. Nous montrerons que, réciproquement, si A est artinienne, tout A-module projectif iudécomposable de type fini est isomorphe à un des $e_i A$.

Soit donc A une algèbre artinienne de radical J. On notera $\overline{A}$ l'algèbre semisimple A/J (voir (VII.4.4)). De même, on notera $\bar{x} = x + J$ la classe de $x \in A$ dans $\overline{A} = A/J$. Il est clair que si $e \in A$ est un idempotent, alors $\bar{e} \in \overline{A}$ est aussi un idempotent. Le lemme technique suivant nous montre que réciproquement, si $\bar{x} \in \overline{A}$ est un idempotent, il existe un idempotent $e \in A$ tel que $\bar{x} = \bar{e}$.

LEMME 1.5 (DE RELÈVEMENT DES IDEMPOTENTS). *Pour tout idempotent* $\bar{x} = x + J \in \overline{A}$, *il existe un idempotent* $e \in A$ *tel que* $x - e \in J$.

DÉMONSTRATION. On commence par construire une suite d'éléments $(x_k)_{k \geq o}$ de A tels que $x_k^2 - x_k \in J^{2^k}$ et $x_{k+1} - x_k \in J^{2^k}$.

Pour $k = 0$, on pose $x_0 = x$. Comme par hypothèse $\bar{x} = x + J$ est un idempotent, on a bien que $x_0^2 \equiv x_0 \pmod{J}$. Supposons $x_0, x_1, \ldots, x_k$ connus et posons $y_k = x_k^2 - x_k \in J^{2^k}$. Alors $x_k y_k = y_k x_k$ et $y_k^2 \in J^{2^k 2} = J^{2^{k+1}}$. On en déduit que si $x_{k+1} = x_k + y_k - 2x_k y_k$, alors

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 &\equiv x_k^2 + 2x_k y_k - 4x_k^2 y_k && \pmod{J^{2^{k+1}}} \\ &\equiv x_k + y_k + 2x_k y_k - 4x_k y_k && \pmod{J^{2^{k+1}}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $x_{k+1}^2 \equiv x_{k+1} \pmod{J^{2^{k+1}}}$. Comme on a

$$x_{k+1} - x_k = y_k(1 - 2x_k) \in J^{2^k},$$

nos conditions sont satisfaites.

Comme J est nilpotent (VII.4.7), il existe un plus petit k, disons $k = k_0$, tel que $J^{2^{k_0}} = 0$. Si on pose $e = x_{k_0}$, on a bien $e^2 - e = 0$, de sorte que e est un idempotent de A. D'autre part, comme $x_{k+1} - x_k \in J^{2^k} \subseteq J$ pour tout k, on a aussi $x - e \in J$. □

PROPOSITION 1.6. *Soit A une K-algèbre artinienne. Alors* $\operatorname{rad}(eAe) = eJe$. *Un idempotent $e \in A$ est primitif si et seulement si $\bar{e} = e + J \in \overline{A}$ est primitif.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que eJe est un idéal bilatère de eAe et qu'en outre il est nil puisque J (qui le contient) l'est. D'autre part, l'application $eAe \to \bar{e}\overline{A}\bar{e}$ définie par $eae \mapsto \bar{e}\bar{a}\bar{e}$ (où $a \in A$) est évidemment un morphisme surjectif d'algèbres de noyau eJe, de sorte que $\bar{e}\overline{J}\bar{e} \xrightarrow{\sim} eAe/eJe$ est une algèbre semisimple (puisque $\overline{A}$ l'est). Par (VII.4.8), $eJe = \operatorname{rad}(eAe)$.

Le second énoncé suit de ce que $\bar{e}$ est primitif si et seulement si $\bar{e}\overline{A}$ est indécomposable. Comme ce dernier est un module projectif sur une algèbre semisimple, cela équivaut à dire que $\bar{e}\overline{A}$ est un $\overline{A}$-module simple, et donc, par le lemme de Schur, que $\bar{e}\overline{A}\bar{e}$ est un corps. Comme $\bar{e}\overline{A}\bar{e} \xrightarrow{\sim} eAe/\operatorname{rad}(eAe)$, cela revient à dire que eAe est locale et donc que e est primitif par (1.4). □

COROLLAIRE 1.7. *Soit A une K-algèbre artinienne. Tout module indécomposable projectif de la forme eA (où e est un idempotent de A) admet un unique sous-module maximal.*

DÉMONSTRATION. Si eA est indécomposable, alors $\bar{e} = e + J$ est primitif donc $\bar{e}\overline{A} \xrightarrow{\sim} eA/eJ$ est simple et eJ est un sous-module maximal de eA. Mais $eJ = (eA)J = \operatorname{rad}(eA)$, donc est l'unique sous-module maximal de eA. □

Rappelons que, pour un A-module M, le quotient $\overline{M} = M/\operatorname{rad} M$ s'appelle la coiffe de M (voir (VII.1)). On vient de prouver que tout A-module indécomposable projectif de la forme eA admet une coiffe simple. Nous allons maintenant montrer que cette coiffe détermine nniquement ce module.

LEMME 1.8. *Soient A une K-algèbre artinienne et $e_1, e_2 \in A$ des idempotents primitifs. Alors $e_1A \xrightarrow{\sim} e_2A$ si et seulement si $\overline{e}_1\overline{A} \xrightarrow{\sim} \overline{e}_2\overline{A}$.*

DÉMONSTRATION. Si $e_1A \xrightarrow{\sim} e_2A$, alors $e_1J = (e_1A)J \xrightarrow{\sim} (e_2A)J = e_2J$ et donc $\overline{e}_1\overline{A} \xrightarrow{\sim} (e_1A)/(e_1J) \xrightarrow{\sim} (e_2A)/(e_2J) \xrightarrow{\sim} \overline{e}_2\overline{A}$. Réciproquement, supposons que $\overline{f} : \overline{e}_1\overline{A} \to \overline{e}_2\overline{A}$ est un isomorphisme. Si on note respectivement $p_1 : e_1A \to \overline{e}_1\overline{A}$ et $p_2 : e_2A \to \overline{e}_2\overline{A}$ les projections canoniques, il suit de la projectivité de e_1A qu'il existe $f : e_1A \to e_2A$ tel que $\overline{f}p_1 = p_2f$. Par (VII.1.7) (le lemme de Nakayama), f est surjectif.

$$\begin{tikzcd}
e_1A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & e_2A \arrow[d, "p_2"] \\
\overline{e}_1\overline{A} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d] & \overline{e}_2\overline{A} \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

Faisant de même avec la réciproque de $\overline{f}$, on trouve un épimorphisme $g : e_2A \to e_1A$. Mais alors $gf : e_1A \to e_1A$ et $fg : e_2A \to e_2A$ sont des épimorphismes. Comme e_1A et e_2A sont des modules de type fini sur une algèbre artinienne, il suit de (VII.6.7) que fg et gf sont des automorphismes. Par conséquent, f et g sont des isomorphismes. □

On arrive au résultat principal de cette section.

THÉORÈME 1.9. *Soit A une K-algèbre artinienne.*

(a) *Tout A-module indécomposable projectif de type fini est isomorphe à un module de la forme eA, avec e un idempotent primitif.*
(b) *L'application $eA \mapsto \bar{e}\overline{A}$ fournit une bijection entre classes d'isomorphismes de A-modules indécomposables projectifs de type fini, et de A-modules simples.*
(c) *Tout A-module projectif de type fini est isomorphe à une somme directe finie de A-modules projectifs indécomposables de type fini. Cette décomposition est unique à isomorphisme près.*

DÉMONSTRATION. (a) Soit P un A-module projectif de type fini. Alors il existe $n > 0$ et P' projectif tels que $A_A^{(n)} \xrightarrow{\sim} P \oplus P'$. Si P est indécomposable, il suit du théorème de décomposition unique (VII.6.13) que P est isomorphe à un facteur direct indécomposable de $A_A^{(n)}$, donc de A_A.

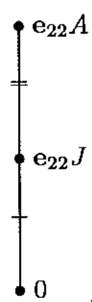
(b) Il suit de (1.8) que l'application $eA \mapsto \bar{e}\bar{A}$ est injective. Or, si $A_A = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iA$ est une décomposition de A_A en modules indécomposables projectifs, $A/J \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{n}(e_iA)/(e_iJ)$ est une décomposition du module semisimple A/J en A/J-modules simples, donc en A-modules simples. Or tout A/J-module simple est isomorphe à un facteur direct indécomposable de A/J, donc à un $(e_iA)/(e_iJ)$.

(c) Suit évidemment de (a) (b) et du théorème de décomposition unique (VII.6.13). □

COROLLAIRE 1.10. *Soient A une K-algèbre artinienne et M un A-module de type fini et de coiffe simple. Il existe un A-module projectif indécomposable P, unique à isomorphisme près, et un épimorphisme $P \to M$.*

DÉMONSTRATION. En effet, M admet un unique sous-module maximal N et M/N est simple. Alors $M/N \xrightarrow{\sim} eA/eJ$ pour un e idempotent primitif de A. Le module $P = eA$ fait l'affaire. Son unicité suit de (1.8). □

Un exemple de calcul est ici utile. Soient K un corps et $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$. On rappelle que $\operatorname{rad} A = J = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux est fourni par les idempotents matriciels e_{11}, e_{22}. En effet, il est clair qu'il s'agit d'idempotents orthogonaux tels que $1 = \mathrm{e}_{11} + \mathrm{e}_{22}$, et en outre $\mathrm{e}_{11}A\mathrm{e}_{11} \xrightarrow{\sim} K$, $\mathrm{e}_{22}A\mathrm{e}_{22} \xrightarrow{\sim} K$ sont deux algèbres locales. On en déduit que A admet exactement deux modules projectifs indécomposables de type fini non-isomorphes, à savoir $\mathrm{e}_{11}A$ et $\mathrm{e}_{22}A$, et deux modules simples non-isomorphes, à savoir leurs coiffes respectives S_1 et S_2. Comme $\dim_K(\mathrm{e}_{11}A) = 1$, on a que $\mathrm{e}_{11}A$ est simple et donc isomorphe à S_1. Par contre, $\dim_K(\mathrm{e}_{22}A) = 2$ et $\operatorname{rad}(\mathrm{e}_{22}A) = \mathrm{e}_{22}J \neq 0$. En fait, $\dim_K(\mathrm{e}_{22}J) = 1$. Par conséquent, $\mathrm{e}_{22}A$ admet un unique sous-module simple, égal à $\mathrm{e}_{22}J$. Comme $\operatorname{Hom}_A(\mathrm{e}_{11}A, \mathrm{e}_{22}A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{e}_{22}A\mathrm{e}_{11} \neq 0$, il existe un morphisme non nul $\mathrm{e}_{11}A \to \mathrm{e}_{22}A$, ce qui implique par le lemme de Schur que $\mathrm{e}_{22}J \xrightarrow{\sim} \mathrm{e}_{11}A \xrightarrow{\sim} S_1$. Le treillis de sous-modules de $\mathrm{e}_{22}A$ est donc



On a une unique suite de composition $0 \subsetneq \mathrm{e}_{22}J \subsetneq \mathrm{e}_{22}A$ avec comme facteurs $\mathrm{e}_{22}J \xrightarrow{\sim} S_1$ et $\mathrm{e}_{22}A/\mathrm{e}_{22}J \xrightarrow{\sim} S_2$.

2. Couvertures projectives.

Nous allons montrer l'existence des couvertures projectives pour les modules de type fini sur une algèbre artinienne. On rappelle qu'au chapitre (IV), nons avons introduit la notion d'enveloppe injective, et montré que tout module admet une enveloppe injective. La notion duale est celle de couverture projective. Comme nous le verrons, l'existence de couvertures projectives est liée aux propriétés du radical. Afin de mettre ce fait en évidence, nous commençons par donner la définition suivante.

DÉFINITION. Soit M_A un A-module. Une *couverture projective* de M est une paire (P, f), où P_A est un A-module projectif et $f : P \to M$ est un épimorphisme qui induit un isomorphisme $\overline{f} : P/\operatorname{rad} P \xrightarrow{\sim} M/\operatorname{rad} M$.

On rappelle en effet que si $f : P \to M$ est un épimorphisme, alors $f(\operatorname{rad} P) \subseteq \operatorname{rad} M$, et f induit donc, par passage aux conoyaux, un morphisme $\overline{f} : P/\operatorname{rad} P \to M/\operatorname{rad} M$. En outre, $\overline{f}$ est toujours un épimorphisme. La situation où $\overline{f}$ est un isomorphisme a été examinée en (VII.1.9), que l'on peut reformuler comme suit:

LEMME 2.1. *Soient P, M deux A-modules de type fini, avec P projectif, et $f : P \to M$ un épimorphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *f est une couverture projective.*
(b) *f est superflu.*
(c) $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{rad} P$. □

Avant de prouver notre théorème d'existence, remarquons qu'il n'est pas vrai que tout module admette une couverture projective: si $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_2$ on a $\operatorname{rad} A = 0$, $\operatorname{rad} M = 0$ et donc la définition donnerait $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\sim} M/\operatorname{rad} M \xrightarrow{\sim} P/\operatorname{rad} P$. Or tout $\mathbb{Z}$-module projectif est libre comme nous le verrons en (XII.1.5) et en fait tout sous-module d'un $\mathbb{Z}$-module libre est libre. Donc P et $\operatorname{rad} P$ sont libres. Par conséquent $\operatorname{rad} P = 0$ et $P/\operatorname{rad} P$ est libre ou nul, dans les deux cas une contradiction.

THÉORÈME 2.2. *Soient A une K-algèbre artinienne et M un A-module de type fini.*

(a) *M admet une couverture projective (P, f) avec P de type fini, et unique à isomorphisme près.*
(b) *La couverture projective de M est isomorphe à celle de sa coiffe M/MJ.*
(c) *La paire (P, f) est une couverture projective de M si et seulement si, pour tout épimorphisme $f' : P' \to M$ avec P' projectif, il existe un épimorphisme $h : P' \to P$ tel que $fh = f'$*

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f'"] & \\ P \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. (a) et (b). Avec les hypothèses faites, $\operatorname{rad} M = MJ$ et en outre M/MJ est un module semisimple, et de type fini puisque M l'est. Écrivons donc $M/MJ = \bigoplus_{i=1}^{t} S_i$ avec chaque S_i un A-module simple. Par (1.9), il existe pour chaque i, un A-module projectif indécomposable (en fait cyclique et engendré par un idempotent primitif) P_i tel que $S_i \xrightarrow{\sim} P_i/P_iJ$. Posons $P_A = \bigoplus_{i=1}^{t} P_i$. Alors P_A est projectif de type fini et

$$P/PJ = \left(\bigoplus_{i=1}^{t} P_i\right) \Big/ \left(\bigoplus_{i=1}^{t} P_i\right) J \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{t} (P_i/P_iJ) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{t} S_i \xrightarrow{\sim} M/MJ.$$

Comme P_A est projectif, le morphisme composé $P \to P/PJ \xrightarrow{\sim} M/MJ$ se relève en un morphisme $f : P \to M$ qui, par le lemme de Nakayama (VII.1.7), est un épimorphisme. Par définition, (P, f) est bien une couverture projective de M. Il suit de la construction que c'est aussi une couverture projective de M/MJ. L'unicité suivra du raisonnement suivant.

(c) Supposons en effet que (P, f) est une couverture projective de M et que $f' : P' \to M$ est un épimorphisme avec P' projectif. Comme P' est projectif, il existe $h : P' \to P$ tel que $fh = f'$. En prenant les morphismes induits sur les coiffes, on a $\overline{f}' = \overline{f}\,\overline{h}$. Comme f' est un épimorphisme, il en est de même de $\overline{f}'$. Comme $\overline{f}$ est un isomorphisme, $\overline{h}$ est un épimorphisme. Le lemme de Nakayama (VII.1.7) donne que h est aussi un épimorphisme.

Réciproquement, supposons la condition donnée satisfaite et construisons P' comme en (a). L'épimorphisme $f' : P' \to M$ donne un épimorphisme $h : P' \to P$ tel que $fh = f'$. Comme P' est projectif, h est une rétraction et donc P est isomorphe à un facteur direct de P'. Mais d'autre part, on a des isomorphismes $P'/P'J \xrightarrow{\sim} M/MJ \xrightarrow{\sim} P/PJ$. Par conséquent $P \xrightarrow{\sim} P'$. Cela démontre (c) et donc l'unicité en (a). □

Par abus de langage, on dit parfois que P (ou encore f) est la couverture projective de M.

Remarquons que la propriété (c) entraîne que la couverture projective de M est un facteur direct de tout module projectif "couvrant" M, c'est-à-dire tel qu'il existe un épimorphisme de ce projectif sur M. On retrouve bien l'idée du plus petit projectif "couvrant" M, exprimée en (IV.4).

On note que si $M = eA/eJ$ est simple, il suit de la construction donnée que sa couverture projective est (P, f) avec $P = eA$ et $f : eA \to eA/eJ$ la projection canonique. Une autre conséquence de cette construction est la suivante.

COROLLAIRE 2.3. *Si $(M_i)_{1 \le i \le m}$ est une famille finie de modules de type fini sur une algèbre artinienne, avec (P_i, f_i) une couverture projective de M_i pour chaque i, alors (P, f) est une couverture projective de $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$, avec $P = \bigoplus_{i=1}^{m} P_i$ et $f : P \to M$ le morphisme induit des f_i.* $\square$

3. Équivalences de catégories de modules.

Notre objectif est le suivant: nous voudrions construire une algèbre "la plus économique possible" avec une catégorie de modules donnée. Cela nous conduit à examiner quand deux catégories de modules sont équivalentes.

DÉFINITION. Deux K-algèbres A et B sont dites *Morita-équivalentes* s'il existe une équivalence K-linéaire $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ (dite alors *équivalence de Morita*).

Rappelons que cela signifie que le foncteur F est plein, fidèle et dense. De façon équivalente, il existe une équivalence quasi-inverse (et aussi K-linéaire) $G : \operatorname{Mod} B \to \operatorname{Mod} A$ d'où des isomorphismes fonctoriels

$$GF \xrightarrow{\sim} 1_{\operatorname{Mod} A} \quad \text{et} \quad FG \xrightarrow{\sim} 1_{\operatorname{Mod} B}.$$

Nous commençons par donner une longue liste (mais non exhaustive) des propriétés préservées par une équivalence. Les preuves en sont toutes triviales et laissées au lecteur. Soient A, B deux K-algèbres, et $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ une équivalence K-linéaire.

(1) Pour deux A-modules M, N, on a un isomorphisme de K-modules

$$\operatorname{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_B(FM, FN).$$

(2) Soit M un A-module, on a un isomorphisme de K-algèbres

$$\operatorname{End}_A M \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_B FM.$$

(3) Une suite $0 \longrightarrow L_A \xrightarrow{f} M_A \xrightarrow{g} N_A \longrightarrow 0$ est exacte (ou exacte et scindée) dans $\operatorname{Mod} A$ si et seulement si la suite induite

$$0 \longrightarrow FL \xrightarrow{Ff} FM \xrightarrow{Fg} FN \longrightarrow 0$$

est exacte (ou exacte et scindée, respectivement) dans $\operatorname{Mod} B$.

(4) Pour toute famille $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de A-modules, on a

$$F\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} FM_\lambda \quad \text{et} \quad F\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda \in \Lambda} FM_\lambda.$$

(5) Un A-module P est projectif si et seulement si le B-module FP est projectif.
(6) Un A-module I est injectif si et seulement si le B-module FI est injectif.
(7) Une paire (P, f) est une couverture projective d'un A-module M si et seulement si (FP, Ff) est une couverture projective du B-module FM.
(8) Une paire (I, j) est une enveloppe injective d'un A-module M si et seulement si (FI, Fj) est une enveloppe injective du B-module FM.
(9) Pour tout A-module M, il existe un isomorphisme entre les treillis de sous-modules du A-module M et du B-module FM.
(10) Un A-module M est artinien si et seulement si le B-module FM l'est.
(11) Un A-module M est noethérien si et seulement si le B-module FM l'est.
(12) Un A-module M est simple si et seulement si le B-module FM l'est.
(13) Un A-module M est de longueur finie si et seulement si le B-module FM l'est, et, dans ce cas, $\ell(M) = \ell(FM)$.
(14) Un A-module M est semisimple si et seulement si le B-module FM l'est.
(15) Un A-module M est indécomposable si et seulement si le B-module FM l'est.

On en déduit, avec les mêmes hypothèses, que:

(a) L'algèbre A est artinienne si et seulement si B l'est.
(b) L'algèbre A est noethérienne si et seulement si B l'est.
(c) L'algèbre A est semisimple si et seulement si B l'est.
(d) L'algèbre A est simple si et seulement si B l'est.

Notre objectif est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une équivalence $F : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, B$. Un A-module M est appelé un *générateur* de $\mathrm{Mod}\, A$ si, pour tout A-module N, il existe un ensemble Λ et un épimorphisme $M^{(\Lambda)} \to N$. Un exemple évident de génératenr de $\mathrm{Mod}\, A$ est fourni par $M_A = A_A$ (puisque tout module est quotient d'un module libre). En fait, tout module libre est un générateur de $\mathrm{Mod}\, A$. Réciproquement, si M_A est un générateur, il existe $m > 0$ tel que $M_A^{(m)} \xrightarrow{\sim} A_A \oplus N_A$ avec N un A-module: en effet, A_A étant libre, et donc projectif, tout épimorphisme $M_A^{(\Lambda)} \to A_A$ est une rétraction. Il suffit donc de montrer que si $f = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : M^{(\Lambda)} \to A$ est un épimorphisme, alors il existe un épimorphisme $g : M^{(m)} \to A$ pour un certain $m > 0$. Or le A-module A est engendré par 1. Donc il existe $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in M^{(\Lambda)}$ tel que

$$1 = f((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda).$$

Soient donc $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ le support fini de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $g = [f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_m}] : M^{(m)} \to A$: il est clair que c'est le morphisme voulu. Cela nous amène au lemme suivant.

LEMME 3.1. *Soient A, B deux K-algèbres, $F : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, B$ et $G : \mathrm{Mod}\, B \to \mathrm{Mod}\, A$ des équivalences K-linéaires quasi-inverses. Posons $P_A = G(B_B)$. Alors:*

(a) *P_A est un A-module projectif.*
(b) *P_A est un générateur de* $\mathrm{Mod}\, A$.
(c) *P_A est de type fini.*

(d) $\mathrm{End}_A P \xrightarrow{\sim} B$.

DÉMONSTRATION. (a) En effet, B_B est un B-module projectif et G est une équivalence.

(b) Soit M_A un A-module. Il existe un B-module U et un isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} GU$. Comme B_B engendre $\mathrm{Mod}\, B$, il existe un ensemble Λ et un épimorphisme $B_B^{(\Lambda)} \to U_B$. Par conséquent, on a un épimorphisme $P_A^{(\Lambda)} \xrightarrow{\sim} GB_B^{(\Lambda)} \to GU_B \xrightarrow{\sim} M_A$.

(c) Il existe un B-module V tel que $GV_B \xrightarrow{\sim} A_A$. Comme A_A engendre P_A, lequel engendre $\mathrm{Mod}\, A$, il s'ensuit que V_B engendre B_B donc engendre $\mathrm{Mod}\, B$. Il suit des remarques précédentes qu'il existe $m > 0$ et un épimorphisme $V_B^{(m)} \to B_B$. On en déduit un épimorphisme $A_A^{(m)} \xrightarrow{\sim} GV_B^{(m)} \to GB_B = P_A$, ce qui montre bien que P_A est de type fini.

(d) $\mathrm{End}\, P_A = \mathrm{End}\, GB_B \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\, B_B \xrightarrow{\sim} B$. $\square$

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. Un A-module projectif de type fini qui est un générateur de $\mathrm{Mod}\, A$ est appelé un *progénérateur* de $\mathrm{Mod}\, A$.

Par exemple, A_A est un progénérateur de $\mathrm{Mod}\, A$. Réciproquement, tout progénérateur de $\mathrm{Mod}\, A$ étant projectif de type fini est isomorphe à un facteur direct de $A_A^{(m)}$ pour un $m > 0$. Le lemme précédent nous assure que l'existence d'une équivalence de Morita entraîne celle d'un progénérateur ayant en outre la propriété que $\mathrm{End}\, P_A \xrightarrow{\sim} B$. Remarquons que tout module à droite ayant une structure naturelle de module à gauche sur une algèbre d'endomorphismes, cette dernière propriété entraîne que P_A est aussi un B-module à gauche et, en fait, un $(B - A)$-bimodule.

THÉORÈME 3.2 (DE MORITA). *Soient A, B deux K-algèbres. Il existe une équivalence K-linéaire $F : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, B$ si et seulement s'il existe un progénérateur P_A tel que $\mathrm{End}\, P_A \xrightarrow{\sim} B$. En outre, si c'est le cas, l'équivalence de catégories est donnée par la paire de foncteurs $F = \mathrm{Hom}_A(P, -)$ et $G = - \otimes_B P$.*

DÉMONSTRATION. Nécessité. S'il existe des équivalences K-linéaires quasi-inverses $F : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, B$ et $G : \mathrm{Mod}\, B \to \mathrm{Mod}\, A$, il suit de (3.1) que $P_A = G(B)$ est un progénérateur tel que $\mathrm{End}\, P_A \xrightarrow{\sim} B$. Il reste à montrer que l'on a des isomorphismes fonctoriels $FM \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(P, M)$ pour tout A-module M_A et $GU = U \otimes_B P$ pour tout B-module U_B. Pour tout A-module M, on a des isomorphismes fonctoriels

$$\begin{aligned} FM &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(B, FM) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(GB, GFM) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(P, M) \end{aligned}$$

d'où $F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(P, -)$. D'autre part, on sait que $G(B) = P_A \xrightarrow{\sim} B_B \otimes_B P$ où l'isomorphisme $\varphi_B : B \otimes_B P \to P$ défini par $b \otimes x \mapsto bx$ (pour $b \in B$, $x \in P$) est fonctoriel (voir (V.1.4)). Tout B-module U admet une présentation libre

$$B_B^{(\Lambda)} \longrightarrow B_B^{(\Sigma)} \longrightarrow U_B \longrightarrow 0$$

où Λ, Σ sont deux ensembles (voir (III.3.7)). Comme G est nne équivalence (donc est un foncteur exact) tandis que $- \otimes_B P$ est exact à droite, on en déduit un diagramme commutatif à lignes exactes:

$$\begin{tikzcd}
B^{(\Lambda)} \otimes_B P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{B^{(\Lambda)}}"'] & B^{(\Sigma)} \otimes_B P \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{B^{(\Sigma)}}"'] & U \otimes_B P \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
GB^{(\Lambda)} \arrow[r] & GB^{(\Sigma)} \arrow[r] & G(U) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Les isomorphismes $\varphi_{B^{(\Lambda)}}$ et $\varphi_{B^{(\Sigma)}}$ en induisent un troisième par passage aux conoyaux. Cela donne bien l'isomorphisme cherché.

Suffisance. Soient P_A un progénérateur et $B = \operatorname{End} P$. Montrons que les foncteurs $F = \operatorname{Hom}_A(P, -)$ et $G = - \otimes_B P$ sont des équivalences quasi-inverses. Il existe des morphismes fonctoriels

$$\varepsilon : GF \to 1_{\operatorname{Mod} A} \quad \text{et} \quad \eta : 1_{\operatorname{Mod} B} \to FG$$

définis comme suit. Pour tout A-module M_A

$$\varepsilon_M : GF(M) = \operatorname{Hom}_A(P, M) \otimes_B P \to M$$

est défini par $f \otimes y \mapsto f(y)$ (où $f \in \operatorname{Hom}_A(P, M)$ et $y \in P$), et, pour tout B-module U_B

$$\eta_U : U \to FG(U) = \operatorname{Hom}_A(P, U \otimes_B P)$$

est défini par $x \mapsto (y \mapsto x \otimes y)$ (où $x \in U$ et $y \in P$). Il est facile de vérifier que ε et η sont des morphismes fonctoriels.

D'autre part, η_B est un isomorphisme: en effet η_B n'est autre que la composition des isomorphismes suivants

$$FG(B) = \operatorname{Hom}_A(P, B \otimes_B P) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(P, P) = \operatorname{End}_A P = B.$$

Par conséquent, pour tout ensemble Λ, le morphisme $\eta_{B^{(\Lambda)}}$ est un isomorphisme. Soient donc U_B un B-module arbitraire et

$$B_B^{(\Lambda)} \longrightarrow B_B^{(\Sigma)} \longrightarrow U_B \longrightarrow 0$$

une présentation libre de U. On applique le foncteur FG. Comme $G = - \otimes_B P$ est exact à droite, on a une suite exacte de $\operatorname{Mod} A$

$$GB_B^{(\Lambda)} \longrightarrow GB_B^{(\Sigma)} \longrightarrow GU \longrightarrow 0.$$

Comme P est projectif, le foncteur $F = \operatorname{Hom}_A(P, -)$ est exact, d'où une suite exacte de $\operatorname{Mod} B$

$$FGB_B^{(\Lambda)} \longrightarrow FGB_B^{(\Sigma)} \longrightarrow FGU \longrightarrow 0.$$

Il suit de la fonctorialité de η que l'on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} B_B^{(\Lambda)} & \longrightarrow & B_B^{(\Sigma)} & \longrightarrow & U_B & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle \eta_{B^{(\Lambda)}}}\downarrow & & {\scriptstyle \eta_{B^{(\Sigma)}}}\downarrow & & {\scriptstyle \eta_U}\downarrow & & \\ FGB_B^{(\Lambda)} & \longrightarrow & FGB_B^{(\Sigma)} & \longrightarrow & FGU_B & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Comme $\eta_{B^{(\Lambda)}}$ et $\eta_{B^{(\Sigma)}}$ sont des isomorphismes, η_U l'est aussi. Comme U_B est arbitraire, cela montre bien qne η est un isomorphisme fonctoriel.

On montre de même que ε est un isomorphisme fonctoriel: en effet, P_A étant un progénérateur, tout A-module M admet une présentation projective de la forme

$$P_A^{(\Lambda)} \longrightarrow P_A^{(\Sigma)} \longrightarrow M_A \longrightarrow 0.$$

Il ne reste plus qu'à observer que ε_P est un isomorphisme (en effet, ε_P est la composition des isomorphismes $\mathrm{Hom}_A(P,P) \otimes_B P = \mathrm{End}_A P \otimes_B P = B \otimes_B P \xrightarrow{\sim} P_A$) et à appliquer le raisonnement précédent. □

Il est intéressant de remarquer qu'avec les hypothèses du théorème, ${}_BP$ est un progénérateur de $\mathrm{Mod}\, B^{\mathrm{op}}$. En effet, P_A étant un progénérateur de $\mathrm{Mod}\, A$, il existe un $n > 0$ et un A-module M_A tels que l'on a un isomorphisme

$$P_A^{(n)} \xrightarrow{\sim} A_A \oplus M_A.$$

Si on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, {}_BP_A)$ on en déduit un isomorphisme de B-modules à gauche

$$\begin{aligned} {}_BB^{(n)} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(P_A^{(n)}, {}_BP_A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A_A, {}_BP_A) \oplus \mathrm{Hom}_A(M, {}_BP_A) \\ &\xrightarrow{\sim} {}_BP \oplus \mathrm{Hom}_A(M, P). \end{aligned}$$

Cela montre que ${}_BP$ est projectif de type fini. Il reste à montrer qu'il engendre $\mathrm{Mod}\, B^{\mathrm{op}}$. Mais on sait qu'il existe un $m > 0$ et un A-module N_A tels que l'on a un isomorphisme

$$A_A^{(m)} \xrightarrow{\sim} P_A \oplus N_A.$$

Le même raisonnement que plus haut donne ${}_BP^{(m)} \xrightarrow{\sim} {}_BB \oplus \mathrm{Hom}_A(N, P)$. Cela prouve notre énoncé.

COROLLAIRE 3.3. *Soient A une K-algèbre et n un entier positif. Alors A et $M_n(A)$ sont Morita-équivalentes.*

DÉMONSTRATION. $M_n(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_A(A^{(n)})$. Mais $A_A^{(n)}$ est évidemment un progénérateur de $\mathrm{Mod}\, A$. □

On a vu dans le chapitre précédent l'intérêt de se restreindre aux modules de type fini. Pour une K-algèbre A, notons $\mathrm{mod}\, A$ la sous-catégorie de $\mathrm{Mod}\, A$ formée des modules de type fini. Le fait que tout progénérateur soit en particulier un module de type fini entraîne le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.4. *Soient A, B deux K-algèbres. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *A et B sont Morita-équivalentes.*
(b) *Il existe un progénérateur P_A tel que* $\operatorname{End} P_A \xrightarrow{\sim} B$.
(c) *Il existe une équivalence K-linéaire* $\operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$.

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (a) et (b) a été établie en (3.2). Pour montrer que (a) implique (c), il suffit de montrer que si M_A est un A-module de type fini, alors $\operatorname{Hom}_A(P, M)$ est un B-module de type fini. Mais dire que M_A est de type fini revient à dire qu'il existe un $n > 0$ et un épimorphisme $A_A^{(n)} \to M_A$. D'autre part, P_A étant un progénérateur, il existe un $m > 0$ et un épimorphisme $P_A^{(m)} \to A_A$ d'où par composition un épimorphisme $P_A^{(mn)} \to M_A$. Comme P_A est projectif, le foncteur $\operatorname{Hom}_A({}_BP_A, -)$ est exact, d'où un épimorphisme $B_B^{(mn)} \to \operatorname{Hom}_A(P, M)$.

Réciproquement, soient $F : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ et $G : \operatorname{mod} B \to \operatorname{mod} A$ deux équivalences quasi-inverses. Posons $P_A = G(B_B)$. Alors P_A est projectif de type fini et $\operatorname{End} P_A \xrightarrow{\sim} \operatorname{End} B_B \xrightarrow{\sim} B$. Il reste à montrer que P_A engendre $\operatorname{Mod} A$, et, pour cela, il suffit de trouver un $n > 0$ et un épimorphisme $P_A^{(n)} \to A_A$. Or A_A est un A-module de type fini, donc $F(A_A)$ est un B-module de type fini. Par conséquent, il existe un $n > 0$ et un épimorphisme $B_B^{(n)} \to F(A_A)$, d'où l'épimorphisme cherché $P_A^{(n)} = G\left(B_B^{(n)}\right) \to GF(A_A) \xrightarrow{\sim} A_A$. $\square$

On voit donc que les progénérateurs de $\operatorname{mod} A$ et de $\operatorname{Mod} A$ coïncident.

Le corollaire (3.4) est évidemment particulièrement intéressant à appliquer dans le cas où A est une algèbre artinienne. On a vu qu'alors $\operatorname{mod} A$ coïncide avec la sous-catégorie pleine de $\operatorname{Mod} A$ formée des A-modules de longueur finie, ou encore des modules artiniens, ou encore des modules noethériens. Un cas particulier est celui où A est une K-algèbre de dimension finie avec K un corps. Comme tout progénérateur est un module de dimension finie en tant que K-espace vectoriel, il s'ensuit que toute K-algèbre B qui est Morita-équivalente à A est aussi de dimension finie (mais, comme le montre le corollaire (3.3), sa dimension n'est généralement pas égale à celle de A).

Nous montrons maintenant qu'il est possible de construire une algèbre la plus petite possible qui soit Morita-équivalente à une algèbre artinienne donnée.

Nous avons pour cela besoin d'un lemme.

LEMME 3.5. *Soient A une K-algèbre artinienne de radical J et P un A-module projectif. Alors*

$$\operatorname{End} P_A / \operatorname{rad} \operatorname{End} P_A \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(P/PJ)_{A/J}.$$

DÉMONSTRATION. Ou considère l'application K-linéaire

$$\varphi : \operatorname{End} P \to \operatorname{End} P/PJ$$

définie comme suit: si $f : P \to P$ est A-linéaire, alors $f(PJ) = f(\operatorname{rad} P) \subseteq \operatorname{rad} P = PJ$ entraîne l'existence d'un morphisme $\overline{f} : P/PJ \to P/PJ$ par passage aux conoyanx (VII.1). On pose alors $\varphi(f) = \overline{f}$. Si on note $p : P \to P/PJ$ la projection canoniqne, $\overline{f}$ est le seul morphisme tel que $\overline{f}p = pf$.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ P/PJ & \xrightarrow{\overline{f}} & P/PJ \end{array} .$$

Il suit de la projectivité de P que φ est une application surjective. Comme φ préserve évidemment l'identité et la composition, φ est un morphisme surjectif d'algèbres. On affirme que $\operatorname{rad}\operatorname{End} P = \operatorname{Ker}\varphi$, ce qui achèvera de prouver l'énoncé. Si $f \in \operatorname{Ker}\varphi$, on a $pf = \varphi(f)p = 0$ d'où $f(P) \subseteq \operatorname{Ker} p = PJ$. Par conséquent, $f^m(P) \subseteq PJ^m$ pour tout m, et donc $f \in \operatorname{End} P$ est nilpotent. Cela montre que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un idéal nil. D'autre part, P/PJ est un A-module semisimple. Par conséquent, $\operatorname{End}_A(P/PJ)$ est une K-algèbre semisimple par (VI.6.5). Comme $\operatorname{End} P/PJ \xrightarrow{\sim} (\operatorname{End} P)/\operatorname{Ker}\varphi$, on déduit de (VII.4.8) que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{rad}\operatorname{End} P$. $\square$

DÉFINITION. Une algèbre B est dite *réduite* (ou *sobre*) si $B/\operatorname{rad} B$ est un produit direct de corps (peut-être gauches). Une algèbre réduite B qui est de la forme $B = \operatorname{End} P_A$, avec P un progénérateur de $\operatorname{Mod} A$, s'appelle une *algèbre réduite* de A.

Par exemple, soit K un corps, alors $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$ est une algèbre réduite. En effet, on sait que $\operatorname{rad} A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ K & 0 \end{smallmatrix}\right]$ et par conséquent $A/\operatorname{rad} A \xrightarrow{\sim} K \times K$.

THÉORÈME 3.6. *Soit A une K-algèbre artinienne.*

(a) *Soient $P_1, P_2, \dots, P_m$ des A-modules indécomposables projectifs et $P = \bigoplus_{i=1}^{m} P_i$. Alors $\operatorname{End} P_A$ est une algèbre réduite si et seulement si $P_i \not\xrightarrow{\sim} P_j$ pour $i \neq j$.*

(b) *Il existe un facteur direct P_A de A_A, unique à isomorphisme près, tel que $\operatorname{End} P_A$ soit une algèbre réduite de A.*

DÉMONSTRATION. (a) Il suit de (3.5) que

$$\operatorname{End} P/\operatorname{rad}\operatorname{End} P \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}(P/PJ)_{A/J} \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}\left(\bigoplus_{i=1}^{m}(P_i/P_IJ)\right)_{A/J}$$

où chaque P_i/P_iJ est un A/J-module simple. Il suit donc de (VI.6.5) que $\operatorname{End} P$ est réduite si et seulement si $P_i/P_iJ \not\xrightarrow{\sim} P_j/P_jJ$ pour $i \neq j$. Par (1.8), ce dernier énoncé équivaut à $P_i \not\xrightarrow{\sim} P_j$ pour $i \neq j$.

(b) Posons $A_A = P_1^{(n_1)} \oplus P_2^{(n_2)} \oplus \cdots \oplus P_t^{(n_t)}$ avec $n_1, \dots, n_t > 0$ des entiers et $P_i \not\xrightarrow{\sim} P_j$ pour $i \neq j$. Le module P_A cherché ne peut être autre que $P_A = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_t$. Il est clair en effet que tout progénérateur de $\operatorname{Mod} A$ est de la forme $\bigoplus_{i=1}^{t} P_i^{(m_i)}$ avec $m_i > 0$ pour tout i, et (a) entraîne que l'on doit avoir $m_i = 1$ pour tout i. Le module P_A satisfait bien les propriétés voulues et est uuiquement déterminé par ces dernières. □

Il suit de ce théorème qu'une algèbre réduite d'une algèbre artinienne donnée A est uniquement déterminée à isomorphisme près. Par abus de langage, on l'appelle l'algèbre réduite de A et on la note A_b.

Soit par exemple C un sur-corps (peut-être gauche) de K et $A = M_n(C)$. Il suit de (VI.7.7) que A_b est isomorphe à l'algèbre d'endomorphismes d'un module simple quelconque sur A (tous étant isomorphes), donc à C. Plus généralement, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.7. *Une K-algèbre artinienne A est semisimple si et seulement si son algèbre réduite A_b est un produit direct de sur-corps de K.*

DÉMONSTRATION. On applique les théorèmes de Morita et de Wedderburn-Artin. □

4. Dualité et modules injectifs.

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories K-linéaires. Une paire (F, G) de foncteurs contravariants $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ est appelée une *dualité* entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ s'il existe des isomorphismes fonctoriels

$$GF \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad FG \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{D}}.$$

On dit aussi que F et G sont des dualités quasi-inverses.

Un exemple évident de dualité est le suivant. Pour une catégorie arbitraire $\mathcal{C}$, soit ${}^{\mathrm{op}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ le foncteur contravariant canonique appliquant $\mathcal{C}$ sur la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ (voir (III.1)), son (quasi-) inverse étant le foncteur ${}^{\mathrm{op}}$: $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$. Cet exemple est assez général.

LEMME 4.1. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories K-linéaires. Les foncteurs contravariants $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sont des dualités quasi-inverses si et seulement si les foncteurs composés $({}^{\mathrm{op}}) \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ et $G \circ ({}^{\mathrm{op}}) : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ sont des équivalences quasi-inverses.*

DÉMONSTRATION. Application directe des définitions. □

On peut donc déduire les propriétés préservées par une dualité de celles préservées par une équivalence. Nous laissons au lecteur le soin de dresser une liste semblable à celle de la section 3. Par contre l'existence d'une dualité entre catégories de modules pose un problème entièrement différent et bien plus difficile. Nous allons néanmoins montrer que, si A est une algèbre de dimension finie sur un corps K, alors il existe une dualité entre les catégories de modules de type fini $\operatorname{mod} A$ (des A-modules à droite) et $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ (des A-modules à gauche).

Une K-algèbre de dimension finie étant évidemment artinienne et noethérienne, toutes les propriétés de ces algèbres vues plus haut sont satisfaites. En particulier, il y a une identité entre modules de type fini, modules artiniens, modules noethériens et modules de longueur finie. En outre, on a le lemme suivant.

LEMME 4.2. *Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps K. La catégorie* $\operatorname{mod} A$ *des A-modules de type fini coïncide avec la sous-catégorie pleine de* $\operatorname{Mod} A$ *formée des A-modules qui sont de dimension finie en tant que K-espaces vectoriels.*

DÉMONSTRATION. Soit M_A un A-module de type fini. Il existe un $n > 0$ et un épimorphisme $A_A^{(n)} \to M_A$. Comme A_A est un K-espace vectoriel de dimension finie, il en est de même de M. La réciproque est évidente. □

Notre objectif est de montrer l'existence de dualités quasi-inverses $D : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ et $D' : \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}} \to \operatorname{mod} A$. Soit donc M_A un A-module de type fini. Si on considère M comme un $(K - A)$-bimodule, on sait que le foncteur $D = \operatorname{Hom}_K(-, K)$ confère à $DM = \operatorname{Hom}_K(M, K)$ une structure canonique de A-module à gauche (voir (II.5.2)) par:

$$(af)(x) = f(xa)$$

(où $a \in A$, $f \in DM$, $x \in M$). Pour un morphisme $u : M \to N$ de A-modules, l'application $Du = \operatorname{Hom}_K(u, K) : DN \to DM$ est définie par $f \mapsto fu$ (où $f \in DN$).

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[dr, dashed, "fu"'] & N \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

On vérifie aisément que Du est un morphisme de A-modules à gauche. On vérifie tout aussi facilement que D est un foucteur contravariant.

De même, si ${}_AU$ est un A-module à gauche, alors $D'(U) = \operatorname{Hom}_K(U, K)$ est un A-module à droite. Par conséquent, on obtient également un foncteur contravariant $D' = \operatorname{Hom}_K(-, K) : \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}} \to \operatorname{mod} A$. Comme les expressions de D et D' sont pareilles, on désignera ces deux foncteurs par la lettre D.

THÉORÈME 4.3. *Les foncteurs $D : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A^{op}$ et $D : \operatorname{mod} A^{op} \to \operatorname{mod} A$ sont des dualités quasi-inverses.*

DÉMONSTRATION. Il suffit, par symétrie, de montrer que l'on a des isomorphismes fonctoriels $1_{\operatorname{mod} A} \xrightarrow{\sim} D^2$. Or, il suit de résultats élémentaires d'algèbre linéaire que l'on a un morphisme fonctoriel $\varepsilon_M : M \to D^2M$ défini par l'évaluation

$$x \mapsto (\varepsilon_M(x) : f \mapsto f(x))$$

(pour $x \in M$, $f \in DM$). En outre, M_A étant un K-espace vectoriel de dimension finie, ε_M est un isomorphisme pour tout M. □

COROLLAIRE 4.4. *Si* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *est une suite exacte (ou exacte et scindée) de* A*-modules à droite, alors la suite*

$$0 \longrightarrow DN \xrightarrow{Dg} DM \xrightarrow{Df} DL \longrightarrow 0$$

est une suite exacte (ou exacte et scindée, respectivement) de A*-modules à gauche.* $\square$

On a évidemment un résultat analogue pour les suites exactes de modules à gauche.

Une conséquence immédiate du corollaire précédent est que la dualité induit un anti-isomorphisme entre le treillis de sous-modules d'un module M_A et celui du module correspondant ${}_ADM$. Cet anti-isomorphisme est donné comme suit: au sous-module L_A de M_A correspond le sous-modnle de DM défini par

$$L^{\perp} = D(M/L) = \{f \in DM \mid f(L) = 0\}.$$

C'est ce qu'en algèbre élémentaire on appelle le *complément orthogonal* ou *annulateur* de L. Il suit du corollaire (4.4) que l'on a

$$DM/L^{\perp} \xrightarrow{\sim} DL.$$

On a en outre les formules bien connues:

(a) $L_1 \subseteq L_2$ implique $L_2^{\perp} \subseteq L_1^{\perp}$.
(b) $L^{\perp\perp} = L$.
(c) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$.
(d) $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

Il suit de cet anti-isomorphisme qu'un module est simple (ou semisimple, ou indécomposable) si et seulement si son dual l'est.

Notre caractérisation des A-modules indécomposables injectifs suit directement des considérations précédentes.

THÉORÈME 4.5. *Soient* A *une* K*-algèbre de dimension finie et* I_A *un* A*-module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) I_A *est injectif.*
(b) ${}_A(DI)$ *est projectif.*
(c) *Il existe un* $n > 0$ *tel que* I_A *est un facteur direct de* $D\left({}_AA^{(n)}\right)$.
(d) $I_A \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{m} D(Ae_i)^{(n_i)}$ *où* $\{e_1, \dots, e_m\}$ *forme un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de* A *et* $n_i \geq 0$ *pour tout* i. $\square$

On en déduit la caractérisation cherchée des A-modules injectifs indécomposables.

COROLLAIRE 4.6. *Soient* A *une* K*-algèbre de dimension finie et* I_A *un* A*-module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) I_A *est injectif indécomposable.*
(b) ${}_A(DI)$ *est projectif indécomposable.*
(c) I_A *est isomorphe à un facteur direct indécomposable de* $D({}_AA)$.

(d) *Il existe un idempotent primitif* $e \in A$ *tel que* $I \xrightarrow{\sim} D(Ae)$.
(e) I_A *est injectif de socle simple.*
(f) I_A *est l'enveloppe injective d'un module simple.*

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (a) (b) (c) (d) suit du théorème, celle de (e) et (f) avec les précédents de ce que, par (1.9), un module projectif est indécomposable si et seulement si sa coiffe est simple, et, par (2.3), de ce qu'un module est projectif indécomposable si et seulement s'il est la couverture projective d'un module simple. □

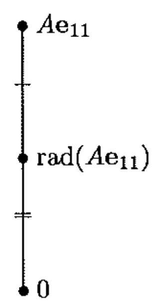
En particulier, il suit de l'équivalence de (a) et (c) que $D({}_AA)$ est un cogénérateur injectif de $\mathrm{mod}\, A$.

Il suit d'autre part de l'anti-isomorphisme décrit plus haut que, si e est un idempotent primitif de A (de sorte que $D(Ae)$ est un A-module injectif indécomposable), alors le socle (simple) $\mathrm{soc}\, D(Ae)$ de $D(Ae)$ est isomorphe au dual de la coiffe (simple) Ae/Je du A-module projectif indécomposable Ae. Nous allons en fait montrer plns.

COROLLAIRE 4.7. *Soient A une K-algèbre de dimension finie et $e \in A$ un idempotent primitif. Alors* $\mathrm{soc}(Ae) \xrightarrow{\sim} eA/eJ$, *de sorte que la correspondance* $eA \mapsto D(Ae)$ *induit une bijection entre classes d'isomorphisme de A-modules projectifs indécomposables et classes d'isomorphisme de A-modules injectifs indécomposables.*

DÉMONSTRATION. Au vu des considérations précédentes, il suffit de montrer que $D(eA/eJ) \xrightarrow{\sim} Ae/Je$. Posons $S = eA/eJ$. On a $Se \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(eA, S) \neq 0$ (par (1.1)). Il existe donc une fonctionnelle $f \in DS$ telle que $f(Se) \neq 0$. Mais $f(xe) = (ef)(x)$ pour tout $x \in S$ et donc $e(DS) \neq 0$. Comme ${}_ADS$ est simple, on a que $\mathrm{Hom}_A(Ae, DS) \xrightarrow{\sim} e(DS) \neq 0$. Par conséquent, ${}_ADS$ est isomorphe à la coiffe Ae/Je de Ae. □

Par exemple, soient K un corps et $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$. Un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux est $\{\mathrm{e}_{11}, \mathrm{e}_{22}\}$. Alors A^{op} contient deux modules projectifs indécomposables non-isomorphes, à savoir $A\mathrm{e}_{11}$ et $A\mathrm{e}_{22}$, et deux modules simples, à savoir leurs coiffes respectives S_1' et S_2'. On voit facilement que $A\mathrm{e}_{22} \xrightarrow{\sim} S_2'$, tandis que le treillis de sous-modules de $A\mathrm{e}_{11}$ est



avec $\mathrm{rad}(A\mathrm{e}_{11}) \xrightarrow{\sim} S_2'$ et $A\mathrm{e}_{11}/\mathrm{rad}(A\mathrm{e}_{11}) \xrightarrow{\sim} S_1'$. Par conséquent, $\mathrm{mod}\, A$ contient deux modules injectifs indécomposables non-isomorphes, à savoir $D(A\mathrm{e}_{11})$

et $D(A\mathbf{e}_{22})$ de socles respectifs $S_1 = DS'_1$ et $S_2 = DS'_2$. Il suit de l'anti-isomorphisme de treillis ci-dessus que le treillis de sous-modules de $D(A\mathbf{e}_{11})$ est

$$\begin{tikzcd}[row sep=large] \bullet\, D(A\mathbf{e}_{11}) \arrow[d, dash] \\ \bullet\, \operatorname{soc} D(A\mathbf{e}_{11}) \arrow[d, dash] \\ \bullet\, 0 \end{tikzcd}$$

On voit de suite que $D(A\mathbf{e}_{11}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{e}_{22}A$ est à la fois projectif et injectif.

La correspondance du corollaire précédent peut s'exprimer sous forme fonctorielle. On définit le *foncteur de Nakayama* de $\operatorname{mod} A$ comme étant l'endofoncteur

$$\nu = D \operatorname{Hom}_A(-, A) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A.$$

Il est clair que ν est exact à droite. Il suit de (VI.2.7) appliqué à A de dimension finie sur K, $B = K$, ${}_BI = {}_KK$ que, pour tous A-modules de type fini L, M on a un isomorphisme fonctoriel

$$L \otimes_A DM \xrightarrow{\sim} D \operatorname{Hom}_A(L, M).$$

Par conséquent, prenant $M_A = A_A$, on voit que ν est fonctoriellement isomorphe au foncteur $- \otimes_A DA$.

PROPOSITION 4.8. *Le foncteur de Nakayama ν induit une équivalence de la sous-catégorie pleine* $\operatorname{proj} A$ *de* $\operatorname{mod} A$ *des A-modules projectifs sur la sous-catégorie pleine* $\operatorname{inj} A$ *des A-modules injectifs. Elle admet pour quasi-inverse le foncteur*

$$\nu^{-1} = \operatorname{Hom}_A(DA, -) : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} A.$$

DÉMONSTRATION. On a des isomorphismes fonctoriels

$$\nu(eA) = D \operatorname{Hom}_A(eA, A) \xrightarrow{\sim} D(Ae).$$

Par conséquent, la restriction de ν à $\operatorname{proj} A$ a son image dans $\operatorname{inj} A$. Réciproquement, on a des isomorphismes fonctoriels

$$\nu^{-1}(D(Ae)) = \operatorname{Hom}_A(DA, D(Ae))) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(Ae, A) \xrightarrow{\sim} eA,$$

d'où l'énoncé. $\square$

Enfin, cette correspondance entre projectifs et injectifs indécomposables induit aussi l'isomorphisme suivant.

LEMME 4.9. *Pour tout A-module M, on a un isomorphisme de K-espaces vectoriels*

$$\operatorname{Hom}_A(eA, M) \xrightarrow{\sim} D \operatorname{Hom}_A(M, D(Ae)).$$

DÉMONSTRATION. En effet, on a

$$\begin{aligned} D\operatorname{Hom}_A(M, D(Ae)) &\xrightarrow{\sim} D\operatorname{Hom}_{A^{\mathrm{op}}}(Ae, DM) \\ &\xrightarrow{\sim} D(eDM) \\ &\xrightarrow{\sim} D(D(Me)) \\ &\xrightarrow{\sim} Me \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(eA, M). \quad \square \end{aligned}$$

5. Groupe de Grothendieck et matrice de Cartan.

Dans cette section, comme dans la précédente, on suppose que K est un corps et A est une K-algèbre connexe de dimension finie. Notre but est d'attacher à chaque A-module de type fini un vecteur appartenant à un groupe abélien libre. Comme la catégorie des A-modules de type fini est équivalente à la catégorie des modules de type fini sur l'algèbre réduite de A, on peut supposer en outre (et ce dès le départ) que A est réduite. On ajoutera une hypothèse supplémentaire: on supposera en outre que A est une K-algèbre *déployée*, c'est-à-dire telle que

$$A/\operatorname{rad} A = K \times K \times \cdots \times K.$$

Observons que, si K est algébriquement clos, alors il suit de (VI.7.4) et de (3.7) que toute K-algèbre réduite est automatiquement déployée. Il est important pour notre propos de remarquer que, si A est déployée, alors tout A-module simple S est de K-dimension 1: en effet, cela suit de ce que S est aussi un $A/\operatorname{rad} A$-module simple, par (VII.4.3).

On se fixe un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Pour chaque i, avec $1 \leq i \leq n$, on note $P(i) = e_iA$ et $I(i) = D(Ae_i)$ respectivement le A-module projectif indécomposable et le A-module injectif indécomposable correspondants. Alors l'ensemble $\{P(1), \ldots, P(n)\}$ (ou $\{I(1), \ldots, I(n)\}$) est un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphisme de A-modules projectifs (ou injectifs, respectivement) indécomposables, et en outre on a $A_A = \bigoplus_{i=1}^{n} P(i)$. Enfin, pour chaque i, avec $1 \leq i \leq n$, on a $S(i) = \operatorname{soc} I(i) \xrightarrow{\sim} P(i)/\operatorname{rad} P(i)$ simple.

LEMME 5.1. *Pour chaque A-module de type fini M, on a que* $\dim_K Me_i$ *est égal au nombre de facteurs de composition de M isomorphes à $S(i)$.*

DÉMONSTRATION. On sait que $Me_i \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(P(i), M)$ (par (1.1)). Soit donc $f \in \operatorname{Hom}_A(P(i), M)$ un morphisme non nul. Alors l'image par f de la coiffe simple $S(i)$ de $P(i)$ est évidemment un facteur de composition de M, isomorphe à $S(i)$. Réciproquement, pour chaque facteur de composition de M isomorphe à $S(i)$, il existe un sous-module de M dont la coiffe admet uu facteur direct isomorphe à $S(i)$. Comme, pour chaque tel sous-module, il existe un morphisme non nul de $P(i)$ dans M, l'énoncé s'ensuit. $\square$

DÉFINITION. Soit M un A-module de type fini. Le *vecteur-dimension* de M est l'élément de $\mathbb{Z}^{(n)}$ défini par

$$\mathbf{dim}M = \begin{bmatrix} \dim_K Me_1 \\ \vdots \\ \dim_k Me_n \end{bmatrix}.$$

On convient de noter tous nos vecteurs en colonnes.

On remarque que la longueur de composition de M est donnée par $\ell(M) = \sum_{i=1}^{n} \dim_K Me_i = \dim_K M$. En outre, les vecteurs-dimension des A-modules simples $S(i)$ coïncident avec les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{Z}^{(n)}$.

On a le lemme suivant.

LEMME 5.2. *La fonction* $\mathbf{dim}$ *est additive: si* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *est une suite exacte courte de* $\operatorname{mod} A$, *alors* $\mathbf{dim}M = \mathbf{dim}L + \mathbf{dim}N$.

DÉMONSTRATION. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Si on applique le foncteur exact $\operatorname{Hom}_A(P(i), -)$ à la suite exacte donnée, on a une suite exacte courte de K-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow Le_i \longrightarrow Me_i \longrightarrow Ne_i \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, $\dim_K Me_i = \dim_K Le_i + \dim_K Ne_i$ pour tout i, d'où l'énoncé. $\square$

DÉFINITION. Soient $\mathcal{F}$ le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble des classes d'isomorphisme $\widetilde{M}$ des A-modules de type fini M, et $\mathcal{F}'$ le sous-groupe de $\mathcal{F}$ engendré par les éléments $\widetilde{M} - \widetilde{L} - \widetilde{N}$ correspondant aux suites exactes courtes $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ de $\operatorname{mod} A$. Le *groupe de Grothendieck* de $\operatorname{mod} A$ est défini comme étant le groupe $K_0(A) = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$. On notera $[M]$ l'image par l'application canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ de la classe d'isomorphisme $\widetilde{M}$ de M.

Il se fait que $K_0(A)$ est lui-même libre et en fait isomorphe à $\mathbb{Z}^{(n)}$. Cela suit du théorème suivant.

THÉORÈME 5.3. *Soit A une K-algèbre de dimension finie, connexe, réduite et déployée, ayant $\{e_1, \dots, e_n\}$ comme ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux. Posons $S(i) = e_iA/\operatorname{rad}(e_iA)$ pour chaque i, avec $1 \le i \le n$. Alors $K_0(A)$ est un groupe abélien libre de base $\{[S(1)], \dots, [S(n)]\}$ et l'application $M \mapsto \mathbf{dim}M$ induit un unique isomorphisme de groupes $\mathbf{dim} : K_0(A) \to \mathbb{Z}^{(n)}$ tel que $\mathbf{dim}[M] = \mathbf{dim}M$.*

DÉMONSTRATION. On commence par montrer que $\{[S(1)], \dots, [S(n)]\}$ engendre $K_0(A)$. Soient M un A-module, et

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = M$$

une suite de composition pour M. Alors, par défiuition de $K_0(A)$, on a

$$[M] = \sum_{j=1}^{t} [M_j/M_{j-1}] = \sum_{i=1}^{n} (\dim_K Me_i)[S(i)]$$

par (5.1). Donc $\{[S(1)], \ldots, [S(n)]\}$ engendre bien $K_0(A)$.

Il est clair que $M \xrightarrow{\sim} N$ entraîne $\mathbf{dim}M = \mathbf{dim}N$. En outre, l'additivité de la fonction $\mathbf{dim}$ (voir (5.2)) entraîne que l'application $M \mapsto \mathbf{dim}M$ induit un unique homomorphisme de groupes abéliens $\mathbf{dim} : K_0(A) \to \mathbb{Z}^{(n)}$ tel que $\mathbf{dim}[M] = \mathbf{dim}M$. Comme $\{[S(1)], \ldots, [S(n)]\}$ est un ensemble de générateurs de $K_0(A)$, dont l'image est la base canonique de $\mathbb{Z}^{(n)}$, il s'ensuit que $\{[S(1)], \ldots, [S(n)]\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $K_0(A)$. Il en forme donc une base et par conséquent $\mathbf{dim}$ est bien un isomorphisme. □

DÉFINITION. La *matrice de Cartan* C_A de A est la $n \times n$ matrice $C_A = [c_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ dont les coefficients sont défiuis par $c_{ij} = \dim_K(e_j A e_i)$.

Comme on a, par (1.2) et (4.9), des isomorphismes de K-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} e_j A e_i &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(e_i A, e_j A) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(P(i), P(j)) \\ &\xrightarrow{\sim} D \operatorname{Hom}_A(P(j), I(i)) \\ &\xrightarrow{\sim} D^2 \operatorname{Hom}_A(I(i), I(j)) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(I(i), I(j)) \end{aligned}$$

la matrice de Cartan enregistre donc le nombre de morphismes entre A-modules indécomposables projectifs et aussi entre A-modules indécomposables injectifs.

PROPOSITION 5.4. (a) *La* $i^{\grave{e}me}$ *colonne de* C_A *est* $\mathbf{dim}P(i)$.
(b) *La* $i^{\grave{e}me}$ *rangée de* C_A *est* $[\mathbf{dim}I(i)]^t$.
(c) $\mathbf{dim}P(i) = C_A \cdot \mathbf{dim}S(i)$.
(d) $\mathbf{dim}I(i) = C_A^t \cdot \mathbf{dim}S(i)$.

DÉMONSTRATION. (a) Suit de la définition et de ce que $e_i A e_k = P(i) e_k$ pour tous $i, k \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) suit de la définition et de ce que $\dim_K(e_k A e_i) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(e_k A, I(i)) = \dim_K I(i) e_k$ pour tous $i, k \in \{1, \ldots, n\}$.

(c) (d) suivent de (a) (b) et de ce que les vecteurs $\mathbf{dim}S(i)$ forment la base canonique de $\mathbb{Z}^{(n)} \xrightarrow{\sim} K_0(A)$. □

Exercices du Chapitre VIII.

1. Soit A une K-algèbre artinienne et locale. Montrer que tout A-module projectif de type fini est libre.

2. Soit A une K-algèbre artinienne, et M un A-module $\neq 0$ de type fini. Montrer qne, si tout quotient non nul de M est indécomposable, alors M est de coiffe simple.

3. Montrer qu'un idempotent $e \in A$ est primitif si et senlement s'il n'existe pas d'idempotent f tel que $0 \neq f \neq e$ et $f = ef = fe$.

4. Soient A artinienne, e_1, e_2 deux idempotents primitifs tels que $P_1 = e_1 A$ n'est pas isomorphe à $P_2 = e_2 A$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) $\operatorname{Hom}_A(P_1, P_2) \neq 0$.
(b) $P_2(\operatorname{rad} A)P_1 \neq 0$.
(c) $e_2(\operatorname{rad} A)e_1 \neq 0$.

5. Soient A artinienne, M un A-module de type fini. Montrer que si la couverture projective de M est indécomposable, alors M l'est aussi. La réciproque est-elle vraie?

6. Montrer que, si e_1, e_2 sont deux idempotents tels que $e_1 A \xrightarrow{\sim} e_2 A$ et e_1 est central, alors $e_2 = e_1 e_2 = e_2 e_1$. Si e_2 est aussi central, alors montrer que $e_1 = e_2$.

7. Soient $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_m$ deux décompositions de l'identité d'une algèbre artinienne A en idempotents primitifs orthogonaux. Montrer que $n = m$ et qn'il existe $a \in A$ inversible tel que, à l'ordre près, $f_i = a^{-1} e_i a$ (Indication: (VII.6.13) donne à l'ordre près $e_i A \xrightarrow{\sim} f_i A$ pour tont i, défini par nn $a_i \in e_i A f_i$. Essayer $a = \sum_i a_i$).

8. Soit K nn corps. Pour chacune des algèbres suivantes, calculer les A-modules projectifs indécomposables et les A-modules injectifs indécomposables. Pour chacun d'entre eux, dessiner le treillis de sons-modules.

(a) $A = K[t]/\langle t^n \rangle$.

(b) $A = T_n(K) = \begin{bmatrix} K & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ K & \cdots & K \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 \\ K & K & K & K \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix}$.

9. Soit A une K-algèbre. Montrer qu'un A-module M est un générateur de

Mod A si et seulement si le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ est fidèle.

10. Soient A une K-algèbre, M_A un module et $B = \mathrm{End}\, M_A$. Montrer que:

(a) Si M_A est un générateur, ${}_BM$ est projectif de type fini.
(b) Si M_A est projectif de type fini, ${}_BM$ est un générateur.

11. Soient A, B deux K-algèbres de dimension finie. Montrer que $\mathrm{mod}\, A$ et $\mathrm{mod}\, B$ sont équivalentes (au sens de Morita) si et seulement si $\mathrm{mod}\, A^{\mathrm{op}}$ et $\mathrm{mod}\, B^{\mathrm{op}}$ le sont.

12. Montrer que, pour des modules de type fini L_1, L_2, L sur une algèbre de dimension finie, on a:

(a) $L_1 \subseteq L_2$ implique $L_2^{\perp} \subseteq L_1^{\perp}$.
(b) $L^{\perp\perp} = L$.
(c) $(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}$.
(d) $(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} + L_2^{\perp}$.

13. Montrer que, pour tout A-module M de type fini (avec A une algèbre de dimension finie sur un corps), on a $\mathrm{soc}\, DM = (\mathrm{rad}\, M)^{\perp}$.

14. Soient K un corps et A une K-algèbre de dimension finie. Montrer que A est réduite si et seulement si deux facteurs directs distincts de $D({}_AA)$ ne sont pas isomorphes.

15. Soient K un corps, A une K-algèbre de dimension finie et M un A-module de type fini. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) M est fidèle (voir l'exercice (II.1)).
(b) Il existe un $m > 0$ et un monomorphisme $A_A \to M^{(m)}$.
(c) Il existe un $m > 0$ et un épimorphisme $M^{(m)} \to D({}_AA)$.

16. Pour chacune des algèbres de l'exercice 8, calculer les vecteurs-dimension des A-modules projectifs ou injectifs indécomposables, puis la matrice de Cartan.

17. Montrer que le groupe de Grothendieck d'une algèbre A satisfait la propriété universelle suivante: si f est une fonction qui assigne à chaque classe d'isomorphisme $\widetilde{M}$ d'un A-module M de type fini un élément $f(\widetilde{M})$ d'un groupe abélien G de sorte que pour chaque suite exacte courte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

de $\mathrm{mod}\, A$, on a $f(\widetilde{M}) = f(\widetilde{L}) + f(\widetilde{N})$, alors il existe un unique homomorphisme de groupes $F : K_0(A) \to G$ tel que $F([M]) = f(\widetilde{M})$.

CHAPITRE IX

Les foncteurs Ext et Tor.

Comme on l'a vu, les suites exactes et les foncteurs exacts présentent énormément d'avantages. On sait pourtant que la plupart des foncteurs ne sont pas exacts. Par exemple, le foncteur Hom n'est exact qu'à gauche, tandis que le foncteur produit tensoriel n'est exact qu'à droite. Afin d'obtenir une suite exacte à partir d'un foncteur de la forme $\mathrm{Hom}(M,-)$ (avec M un module), l'idée est d'utiliser une approximation de M par des modules projectifs. Une telle approximation est ce que nous avons appelé en (IV.2) une résolution projective de M. On appliqne le foncteur Hom à une résolution projective de M et ou obtient ainsi une suite qui n'est généralement pas exacte, mais est un complexe (au sens de (II.3)). La notion d'homologie vient corriger le défaut d'exactitude de ce complexe en lui associant une suite exacte longue, dite d'homologie. Cela permet d'associer au foncteur Hom de nouveaux foncteurs, dits d'extension et notés Ext^n. La même méthode appliquée au prodnit tensoriel donne des foncteurs dits de torsion, et notés Tor_n. L'approche que nous adoptons (par le biais de ce qn'on appelle des foncteurs dérivés) est longue, mais elle présente l'avantage que les propriétés de Ext et Tor suivent presqu'immédiatement des définitions. En outre, elle permettra de développer des notions qui sont utilisables dans d'autre contextes. Dans tout ce chapitre, on se fixe une K-algèbre A.

1. Foncteurs d'homologie.

Rappelons qu'un *complexe* (ou, plus précisément, un *complexe descendant*) $C_* = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est défini par la donnée d'une suite de A-modules $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et d'une suite d'applications A-linéaires $(d_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $d_nd_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$C_* \qquad\qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

Les applications d_n sont appelées des *différentielles.* L'indice n est appelé le *degré* C_n (l'astérisque dans C_* indique donc où placer le degré).

Si toute suite exacte est évidemment un complexe, un complexe n'est généralement pas exact. En fait, la condition $d_nd_{n+1} = 0$ éqnivaut à dire que $\mathrm{Im}\, d_{n+1} \subseteq \mathrm{Ker}\, d_n$.

EXEMPLES 1.1. (a) À chaque module M_A et à chaque $m \in \mathbb{Z}$, on peut associer un complexe (C_n, d_n) avec $C_m = M$ et $C_n = 0$ pour $n \neq m$. Un tel complexe s'écrit

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{(m)}{M} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

et est dit *concentré* en degré m. Ce complexe est exact si et seulement si $M = 0$.

(b) Soit p un nombre premier. La famille de $\mathbb{Z}$-modules $C_n = \mathbb{Z}_{p^3}$ et d'applications $\mathbb{Z}$-linéaires $d_n = f : \mathbb{Z}_{p^3} \to \mathbb{Z}_{p^3}$, où $f(\bar{x}) = p^2\bar{x}$ (pour $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{p^3}$) définit un complexe qui n'est pas exact.

(c) Soient A, B deux K-algèbres, $C_* = (C_n, d_n)$ un complexe de A-modules et $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ un foncteur K-linéaire, alors on a un complexe de $\operatorname{Mod} B$ défini par

$$F(C_*) \qquad \cdots \longrightarrow F(C_{n+1}) \xrightarrow{F(d_{n+1})} F(C_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(C_{n-1}) \longrightarrow \cdots .$$

On note que $F(C_*)$ n'est généralement pas exact, même si C_* l'est. Par exemple, soient ${}_AN_B$ un $A-B$-bimodule, M_A un A-module et

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de M (qui est donc un complexe exact). On a un complexe de $\operatorname{Mod} B$

$$\cdots \longrightarrow P_n \otimes_A N \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_A N \longrightarrow P_0 \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow 0$$

qui n'est généralement exact qu'en $M \otimes_A N$ (en effet, le foncteur $- \otimes_A N$ n'est généralement exact qu'à droite).

On peut définir une notion de morphismes de complexes. Soient

$$C_* = (C_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad C'_* = (C'_n, d'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

deux complexes de A-modules. Un *morphisme* $f_* : C_* \to C'_*$ est une suite de morphismes de A-modules $(f_n : C_n \to C'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ compatibles avec les différentielles, c'est-à-dire tels que

$$f_{n-1}d_n = d'_n f_n$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$; en d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

Soient $f_* : C_* \to C'_*$ et $f'_* : C'_* \to C''_*$ deux morphismes de complexes avec $f_* = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $f'_* = (f'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. On définit leur composition $f'_* f_* : C_* \to C''_*$ par $f'_* f_* = (f'_n f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

On a ainsi défini une catégorie Comp_* de complexes de A-modules. Nous allons expliciter les notions de sous-objet et d'objet quotient dans cette catégorie.

Soient $C_* = (C_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $C'_* = (C'_n, d'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux complexes de A-modules. On dit que C'_* est un *sous-complexe* de C_* si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a que $C'_n \subseteq C_n$ et d'_n est égale à la restriction de d_n à C'_n: cette seconde condition équivaut à dire que les inclusions canoniques $j_n : C'_n \to C_n$ forment un morphisme de complexes $j_* : C'_* \to C_*$, appelé l'*inclusion canonique*.

Si C'_* est un sous-complexe de C_*, on définit le *complexe quotient* $C''_* = C_*/C'_*$ par

$$C''_* \qquad \cdots \longrightarrow C''_n = C_n/C'_n \xrightarrow{d''_n} C''_{n-1} = C_{n-1}/C'_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

où d''_n est déduite de d_n, d'_n par passage aux conoyaux (II.3.3) c'est-à-dire que d''_n est l'application A-linéaire définie par

$$d''_n(x_n + C'_n) = d_n(x_n) + C'_{n-1}$$

où $x_n \in C_n$. Les applications d''_n forment bien une famille de différentielles sur la suite $(C''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, puisque

$$\begin{aligned} d''_{n-1}d''_n(x_n + C'_n) &= d''_{n-1}(d_n(x_n) + C'_{n-1}) \\ &= d_{n-1}d_n(x_n) + C'_{n-2} \\ &= C'_{n-2} \end{aligned}$$

pour tous $x_n \in C_n$ et $n \in \mathbb{Z}$. On observe qu'il existe un morphisme de complexes $p_* : C_* \to C''_*$ défini par $p_n : C_n \to C''_n = C_n/C'_n$, où $p_n(x_n) = x_n + C'_n$ (pour $x_n \in C_n$). On appelle p_* la *projection canonique*.

Avec ces définitions, on vérifie sans peine que la catégorie Comp_* est abélienne. On voit aisément ce que signifient les notions de noyau, image d'un morphisme de complexes et de suite exacte de complexes.

On arrive à la notion d'homologie. Comme on l'a dit, on veut mesurer le défaut d'exactitude d'un complexe $C_* = (C_n, d_n)$, or on sait que pour tont $n \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{Im}\, d_{n+1} \subseteq \mathrm{Ker}\, d_n$, et cette inclusion est une égalité si et seulement si le complexe est exact en degré n. Cela nous mène à définir l'homologie comme suit.

DÉFINITION. Soit $C_* = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un complexe de A-modules. Son $n^{ème}$ *module d'homologie* est défini par

$$H_n(C_*) = \mathrm{Ker}\, d_n / \mathrm{Im}\, d_{n+1}.$$

Les éléments de $\mathrm{Ker}\, d_n$ sont appelés des *n-cycles* et on note $Z_n = Z_n(C_*) = \mathrm{Ker}\, d_n$ leur module. Les éléments de $\mathrm{Im}\, d_{n+1}$ sont appelés des *n-bords* et on note $B_n = B_n(C_*) = \mathrm{Im}\, d_{n+1}$ leur module.

La terminologie employée ("cycles" et "bords") provient de la topologie algébrique.

EXEMPLES 1.2. (a) Si $d_n = 0$ pour tout n, alors $Z_n = C_n$, $B_n = 0$ et donc $H_n(C_*) = C_n$ pour tout n.

(b) Un complexe C_* est exact en degré n si et seulement si $H_n(C_*) = 0$.

(c) Si C_* est un complexe concentré en degré m, alors $H_m(C_*) = C_m$, $H_n(C_*) = 0$ pour $n \neq m$.

(d) Si p est un nombre premier fixe et C_* est le complexe de $\mathbb{Z}$-modules donné par $C_n = \mathbb{Z}_{p^3}$ et $d_n : \bar{x} \mapsto p^2\bar{x}$ (où $\bar{x} \in C_n$) pour tout n (voir l'exemple (1.1)(b) plus haut) alors $H_n(C_*) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$ pour tout n.

(e) Soit $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ une résolution projective d'un A-module M. Alors le complexe $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$ obtenu à partir de cette résolution projective en supprimant M est un complexe exact partout sauf en degré 0: on a $H_n(P_*) = 0$ si $n \neq 0$ et $H_0(P_*) \xrightarrow{\sim} M$.

Nous sonhaitons faire de chaque H_n un foncteur. Pour cela, nous devons définir son action sur les morphismes.

DÉFINITION. Soient $C_* = (C_n, d_n)$, $C'_* = (C'_n, d'_n)$ deux complexes et $f_* = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : C_* \to C'_*$ un morphisme. On définit, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, une application A-linéaire

$$H_n(f_*) : H_n(C_*) \to H_n(C'_*)$$

par $z_n + B_n(C_*) \mapsto f_n(z_n) + B_n(C'_*)$ (pour $z_n \in Z_n(C_*)$).

Il faut vérifier que $H_n(f_*)$ est définie sans ambiguïté. Notons d'abord que f_n applique $Z_n(C_*)$ dans $Z_n(C'_*)$: en effet, $d'_n f_n(z_n) = f_{n-1} d_n(z_n) = 0$, pour $z_n \in Z_n(C_*)$. D'autre part, f_n applique également $B_n(C_*)$ dans $B_n(C'_*)$: en effet, soit $z_n \in B_n(C_*) = \operatorname{Im} d_{n+1}$, il existe $x_{n+1} \in C_{n+1}$ tel qne $z_n = d_{n+1}(x_{n+1})$ et alors $f_n(z_n) = f_n d_{n+1}(x_{n+1}) = d'_{n+1} f_{n+1}(x_{n+1}) \in B_n(C'_*)$. Cela montre bien que $H_n(f_*)$ est une application A-linéaire de $H_n(C_*)$ dans $H_n(C'_*)$.

On voit sans peine que la définition précédente fait de chaque H_n un foncteur K-linéaire de Comp_* dans $\operatorname{Mod} A$.

LEMME 1.3. *Soit $C_* = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un complexe de A-modules. Pour chaque n, il existe une suite exacte de A-modules*

$$0 \longrightarrow H_n(C_*) \longrightarrow C_n/B_n \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C_*) \longrightarrow 0$$

avec tous les morphismes fonctoriels.

DÉMONSTRATION. La définition du module d'homologie donne une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C_*) \longrightarrow 0.$$

D'autre part, le théorème d'isomorphisme (II.4.4) donne une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_n(C_*) = Z_n/B_n \longrightarrow C_n/B_n \longrightarrow C_n/Z_n \longrightarrow 0.$$

Or $C_n/Z_n = C_n/\operatorname{Ker} d_n \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} d_n = B_{n-1}$, d'où une suite exacte

$$0 \longrightarrow H_n(C_*) \longrightarrow C_n/B_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0.$$

Le résultat suit en raccordant les deux suites. On laisse au lecteur la vérification de la fonctorialité. □

Nous arrivons au résultat principal de cette section, qni explique comment construire une snite exacte de modules à partir d'une suite exacte courte de complexes.

THÉORÈME 1.4. *Soit $0 \longrightarrow C'_* \xrightarrow{u_*} C_* \xrightarrow{v_*} C''_* \longrightarrow 0$ une suite exacte de complexes. Il existe une suite exacte de A-modules*

$$\cdots \longrightarrow H_n(C'_*) \xrightarrow{H_n(u_*)} H_n(C_*) \xrightarrow{H_n(v_*)} H_n(C''_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C'_*) \xrightarrow{H_{n-1}(u_*)} \cdots.$$

DÉMONSTRATION. La donnée d'une suite exacte courte de complexes de la forme $0 \longrightarrow C'_* \xrightarrow{u_*} C_* \xrightarrow{v_*} C''_* \longrightarrow 0$ équivaut à la donnée, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, d'un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "d'_n"'] & C_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "d_n"'] & C''_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "u_{n-1}"] & C_{n-1} \arrow[r, "v_{n-1}"] & C''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $d'_* = (d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $d_* = (d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $d''_* = (d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont les différentielles respectives de C'_*, C_*, C''_*. Une première application du lemme du serpent (II.3.6) donne des suites exactes

$$0 \longrightarrow Z'_n \xrightarrow{i_n} Z_n \xrightarrow{j_n} Z''_n$$

(où $Z'_n = \operatorname{Ker} d'_n$, $Z_n = \operatorname{Ker} d_n$, $Z''_n = \operatorname{Ker} d''_n$ tandis que i_n, j_n sont induites de u_n, u_{n-1} et v_n, v_{n-1} respectivement, par passage aux noyaux) et

$$C'_{n-1}/B'_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} C_{n-1}/B_{n-1} \xrightarrow{q_{n-1}} C''_{n-1}/B''_{n-1} \longrightarrow 0$$

(où $B'_{n-1} = \operatorname{Im} d'_n$, $B_{n-1} = \operatorname{Im} d_n$, $B''_{n-1} = \operatorname{Im} d''_n$ tandis que p_{n-1}, q_{n-1} sont induites de u_n, u_{n-1} et v_n, v_{n-1} respectivement, par passage aux conoyaux) . Le lemme (1.3) donne alors un diagramme commutatif, où les deux lignes centrales et toutes les colonnes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & H_n(C'_*) \arrow[r, "H_n(u_*)"] \arrow[d] & H_n(C_*) \arrow[r, "H_n(v_*)"] \arrow[d] & H_n(C''_*) \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, rounded corners, "\delta_n"] & \\
 & C'_n/B'_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d] & C_n/B_n \arrow[r, "q_n"] \arrow[d] & C''_n/B''_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d] & Z_{n-1} \arrow[r, "j_{n-1}"] \arrow[d] & Z''_{n-1} \arrow[d] & \\
 & H_{n-1}(C'_*) \arrow[r, "H_{n-1}(u_*)"] \arrow[d] & H_{n-1}(C_*) \arrow[r, "H_{n-1}(v_*)"] \arrow[d] & H_{n-1}(C''_*) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} .$$

L'énoncé suit d'une seconde application du lemme du serpent. □

La suite exacte dont le théorème montre l'existence s'appelle *suite exacte longue d'homologie.*

Avec les notations du théorème, les morphismes $\delta_n : H_n(C''_*) \to H_{n-1}(C'_*)$, appelés *morphismes de liaison*, sont les morphismes obtenus à partir du lemme du serpent (II.3.6). Ils s'expriment donc par

$$\delta_n : z''_n + B_n(C''_*) \mapsto u_{n-1}^{-1} d_n v_n^{-1}(z''_n) + B_{n-1}(C'_*)$$

(où $z''_n \in Z''_n$). Il est loin d'être évident que la construction du théorème est fonctorielle. C'est l'objet du théorème suivant dont la très fastidieuse démonstration a au moins le mérite de montrer comment manier les morphismes de liaison.

THÉORÈME 1.5. *Soit un diagramme commutatif à lignes exactes de complexes et de morphismes de complexes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_* \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "f_*"'] & C_* \arrow[r, "v_*"] \arrow[d, "g_*"'] & C''_* \arrow[r] \arrow[d, "h_*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & D'_* \arrow[r, "u'_*"] & D_* \arrow[r, "v'_*"] & D''_* \arrow[r] & 0 \ .
\end{tikzcd}$$

Alors il existe un diagramme commutatif à lignes exactes de A-modules et d'applications A-linéaires

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(C'_*) \arrow[r, "H_n(u_*)"] \arrow[d, "H_n(f_*)"'] & H_n(C_*) \arrow[r, "H_n(v_*)"] \arrow[d, "H_n(g_*)"'] & H_n(C''_*) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(h_*)"'] & H_{n-1}(C'_*) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f_*)"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(D'_*) \arrow[r, "H_n(u'_*)"] & H_n(D_*) \arrow[r, "H_n(v'_*)"] & H_n(D''_*) \arrow[r, "\delta'_n"] & H_{n-1}(D'_*) \arrow[r] & \cdots \ .
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. Notons respectivement $d_* = (d_n)_n$, $d'_* = (d'_n)_n$, $d''_* = (d''_n)_n$, $e_* = (e_n)_n$, $e'_* = (e'_n)_n$, $e''_* = (e''_n)_n$ les différentielles de C_*, C'_*, C''_*, D_*, D'_*, D''_*. On a, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_n \arrow[rr, "u_n"] \arrow[dr, "f_n"] \arrow[dd, "d'_n"'] & & C_n \arrow[rr, "v_n"] \arrow[dr, "g_n"] \arrow[dd, "d_n"'] & & C''_n \arrow[r] \arrow[dr, "h_n"] \arrow[dd, "d''_n"'] & 0 & & \\
& 0 \arrow[r] & D'_n \arrow[rr, "u'_n"] \arrow[dd, "e'_n"] & & D_n \arrow[rr, "v'_n"] \arrow[dd, "e_n"] & & D''_n \arrow[r] \arrow[dd, "e''_n"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[rr, "u_{n-1}"] \arrow[dr, "f_{n-1}"'] & & C_{n-1} \arrow[rr, "v_{n-1}"] \arrow[dr, "g_{n-1}"'] & & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[dr, "h_{n-1}"'] & 0 & & \\
& 0 \arrow[r] & D'_{n-1} \arrow[rr, "u'_{n-1}"] & & D_{n-1} \arrow[rr, "v'_{n-1}"] & & D''_{n-1} \arrow[r] & 0 \, . &
\end{tikzcd}$$

Comme on sait déjà que chaque H_n est un foncteur, il suffit de prouver que $\delta'_n H_n(h_*) = H_{n-1}(f_*)\delta_n$. Soit donc $z''_n + \operatorname{Im} d''_{n+1} \in H_n(C''_*)$. Il existe $x_n \in C_n$ tel que $z''_n = v_n(x_n)$. On a

$$\begin{aligned}
(\delta'_n H_n(h_*))(z''_n + \operatorname{Im} d''_{n+1}) &= (\delta'_n H_n(h_*))(v_n(x_n) + \operatorname{Im} d''_{n+1}) \\
&= \delta'_n[h_n v_n(x_n) + \operatorname{Im} e''_{n+1}] \\
&= \delta'_n[v'_n g_n(x_n) + \operatorname{Im} e''_{n+1}] \\
&= (u'_{n-1})^{-1} e_n (v'_n)^{-1} v'_n g_n(x_n) + \operatorname{Im} e'_n \\
&= (u'_{n-1})^{-1} e_n g_n(x_n) + \operatorname{Im} e'_n \\
&= (u'_{n-1})^{-1} g_{n-1} d_n(x_n) + \operatorname{Im} e'_n \\
&= f_{n-1}(u_{n-1})^{-1} d_n(x_n) + \operatorname{Im} e'_n \\
&= H_{n-1}(f_*)[(u_{n-1})^{-1} d_n(x_n) + \operatorname{Im} d'_n] \\
&= H_{n-1}(f_*)[(u_{n-1})^{-1} d_n v_n^{-1}(z''_n) + \operatorname{Im} d'_n] \\
&= H_{n-1}(f_*)\delta_n[z''_n + \operatorname{Im} d''_{n+1}]. \quad \square
\end{aligned}$$

Il est important, pour la compréhension des calculs qui précèdent, de garder à l'esprit que dans l'expression de $\delta_n : z''_n + B_n(C''_*) \mapsto u_{n-1}^{-1} d_n v_n^{-1}(z''_n) + B_{n-1}(C'_*)$ (où $z''_n \in Z_n(C''_*)$), le terme $v_n^{-1}(z''_n)$ désigne une préimage quelconque de z''_n, c'est-à-dire un $x_n \in C_n$ tel que $z''_n = v_n(x_n)$, tandis que $u_{n-1}^{-1} d_n v_n^{-1}(z''_n) = u_{n-1}^{-1} d_n(x_n)$ est l'unique préimage de $d_n(x_n)$ par u_{n-1}: il suit en effet de la démonstration du lemme du serpent que cela donne bien une application linéaire.

Deux morphismes distincts de complexes de A-modules peuvent très bien induire le même morphisme en homologie. Un exemple d'une telle situation, très important en topologie algébrique, est le suivant.

DÉFINITION. Soient $C_* = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $C'_* = (C'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux complexes de A-modules, et $f_* = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $g_* = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux morphismes de C_* dans C'_*. On dit que f_* et g_* sont *homotopes* (ce qu'on note $f_* \sim g_*$) s'il existe, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, un morphisme $s_n : C_n \to C'_{n+1}$ tel que $f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "s_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La suite $s_* = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est alors appelée une *homotopie* entre f_* et g_*.

LEMME 1.6. (a) *La relation $\sim$ est une équivalence sur l'ensemble des morphismes de C_* dans C'_*.*

(b) *$f_* \sim g_*$ implique $H_n(f_*) = H_n(g_*)$ pour tout n.*

(c) *Si F est un foncteur covariant K-linéaire et $f_* \sim g_*$, alors $F(f_*) \sim F(g_*)$.*

DÉMONSTRATION. (a) Réflexivité et symétrie sont immédiates. Pour la transitivité, si $f_* \sim g_*$ et $g_* \sim h_*$, il existe, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, des morphismes $s_n : C_n \to C'_{n+1}$ et $t_n : C_n \to C'_{n+1}$ tels que:

$$f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$$
$$g_n - h_n = d'_{n+1}t_n + t_{n-1}d_n\,.$$

Alors, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme $s_n + t_n : C_n \to C'_{n+1}$ vérifie

$$f_n - h_n = d'_{n+1}(s_n + t_n) + (s_{n-1} + t_{n-1})d_n.$$

(b) Soit $(s_n : C_n \to C'_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ tel que $f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$. Si $z_n \in Z_n(C_*)$, on a $d_n(z_n) = 0$ et donc

$$f_n(z_n) - g_n(z_n) = d'_{n+1}s_n(z_n) \in \operatorname{Im} d'_{n+1} = B_n(C'_*).$$

Cela montre bien que $H_n(f_*)(z_n + B_n(C_*)) = H_n(g_*)(z_n + B_n(C_*))$ pour tout $z_n \in Z_n(C_*)$.

(c) La relation $f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$ entraîne

$$F(f_n) - F(g_n) = F(d'_{n+1})F(s_n) + F(s_{n-1}F(d_n). \quad \square$$

On achève cette section avec quelques mots sur la construction duale, celle de la suite exacte longue de cohomologie. Un *complexe ascendant* $C^* = (C^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est défini par la donnée d'une suite de A-modules $(C^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et d'une suite d'applications linéaires $(d^n : C^n \to C^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que $d^n d^{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$C^* \qquad \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots.$$

On définit de façon évidente la notion de morphisme de complexes ascendants, et la catégorie Comp* des complexes ascendants qui est abélienne. Le *$n^{\text{ème}}$ module de cohomologie* d'un complexe ascendant $C^* = (C^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est défini par

$$H^n(C^*) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}.$$

Les éléments de $\operatorname{Ker} d^n$ sont appelés des *n-cocycles* et ceux de $\operatorname{Im} d^{n-1}$ des *n-cobords*. Si $C^* = (C^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $C'^* = (C'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont deux complexes ascendants et $f^* = (f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme de C^* dans C'^*, on définit $H^n(f^*) : H^n(C^*) \to H^n(C'^*)$ par $z^n + \operatorname{Im} d^{n-1} \mapsto f^n(z^n) + \operatorname{Im} d'^{n-1}$ (pour $z^n \in \operatorname{Ker} d^n$). On montre qu'on obtient ainsi, pour chaque n, un foncteur $H^n : \text{Comp}^* \to \operatorname{Mod} A$ et que, si $0 \longrightarrow C'^* \xrightarrow{u^*} C^* \xrightarrow{v^*} C''^* \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte de Comp*, alors il existe une suite exacte de $\operatorname{Mod} A$

$$\cdots \longrightarrow H^n(C'^*) \xrightarrow{H^n(u^*)} H^n(C^*) \xrightarrow{H^n(v^*)} H^n(C''^*) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(C'^*) \longrightarrow \cdots$$

avec tous les morphismes fonctoriels. Cette suite est la *suite exacte longue de cohomologie.* On laisse au lecteur à titre d'exercice la vérification triviale des énoncés précédents.

2. Foncteurs dérivés.

Nous aurons besoin de la notation suivante. Soit C_* un complexe de A-modules de la forme

$$C_* \qquad \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

Le complexe obtenu à partir de C_* en supprimant M sera noté $(C_M)_*$. Ainsi $(C_M)_*$ est le complexe

$$(C_M)_* \qquad \cdots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

THÉORÈME 2.1 (DE COMPARAISON). *Soit le diagramme*

$$\begin{array}{llccccccccc} P_* & \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ P'_* & \cdots & \longrightarrow & P'_2 & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{d'_0} & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont des complexes. Si chaque P_i de la ligne supérieure est projectif, et la ligne inférieure est exacte, il existe un morphisme de complexes $f_* : (P_M)_* \to (P'_{M'})_*$, unique à homotopie près, tel que $fd_o = d'_0 f_0$.

DÉMONSTRATION. (a) Pour montrer l'existence de $f_* = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on construira f_n par récurrence sur n. Si $n = 0$, on a un diagramme à ligne exacte avec P_0 projectif

$$\begin{array}{ccccc} & & P_0 & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle fd_0} & & \\ P'_0 & \xrightarrow{d'_0} & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

d'où l'existence d'un morphisme $f_0 : P_0 \to P'_0$ tel que $fd_0 = d'_0 f_0$. Supposons $f_k : P_k \to P'_k$ construit pour tout $0 \leq k \leq n$. On a ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ P'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & P'_n & \xrightarrow{d'_n} & P'_{n-1} \end{array} .$$

Si on réussit à montrer que $\operatorname{Im}(f_n d_{n+1}) \subseteq \operatorname{Im} d'_{n+1}$, on aura un diagramme à ligne exacte

$$\begin{array}{ccccc} & & P_{n+1} & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_n d_{n+1}} & & \\ P'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & \operatorname{Im} d'_{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et la projectivité de P_{n+1} donnera un morphisme $f_{n+1} : P_{n+1} \to P'_{n+1}$ tel que $f_n d_{n+1} = d'_{n+1} f_{n+1}$. Or, on sait que $\operatorname{Im} d'_{n+1} = \operatorname{Ker} d'_n$. L'inclusion voulue suit alors de $d'_n f_n d_{n+1} = f_{n-1} d_n d_{n+1} = f_{n-1} 0 = 0$.

(b) Pour montrer l'unicité de f_k à homotopie près, on suppose que $g_* : (P_M)_* \to (P'_{M'})_*$ est un autre morphisme de complexes tel que $fd_0 = d'_0 g_0$, et on construit par récurrence une homotopie $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ entre f_* et g_*. Comme $d'_0 f_0 = d'_0 g_0 = fd_0$, on a $d'_0(f_0 - g_0) = 0$ d'où $\operatorname{Im}(f_0 - g_0) \subseteq \operatorname{Ker} d'_0 = \operatorname{Im} d'_1$. Comme P_0 est projectif, il existe $s_0 : P_0 \to P'_0$ tel que $f_0 - g_0 = d'_1 s_0$

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dashed, "s_0"'] \arrow[d, "f_0 - g_0"] & \\ P'_1 \arrow[r, "d'_1"] & \operatorname{Im} d'_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Supposons s_k connu pour $0 \leq k \leq n$. On affirme que

$$\mathrm{Im}(f_{n+1} - g_{n+1} - s_n d_{n+1}) \subseteq \mathrm{Im}\, d'_{n+2} = \mathrm{Ker}\, d'_{n+1}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} d'_{n+1}(f_{n+1} - g_{n+1} - s_n d_{n+1}) &= d'_{n+1} f_{n+1} - d'_{n+1} g_{n+1} - d'_{n+1} s_n d_{n+1} \\ &= f_n d_{n+1} - g_n d_{n+1} - (f_n - g_n - s_{n-1} d_n) d_{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

où l'égalité $d'_{n+1} s_n = f_n - g_n - s_{n-1} d_n$ suit de l'hypothèse de récurrence. La projectivité de P_{n+1} entraîne alors l'existence d'un morphisme $s_{n+1} : P_{n+1} \to P'_{n+2}$ tel que

$$f_{n+1} - g_{n+1} - s_n d_{n+1} = d'_{n+2} s_{n+1}$$

$$\begin{tikzcd} & P_{n+1} \arrow[dl, dashed, "s_{n+1}"'] \arrow[d, "f_{n+1} - g_{n+1} - s_n d_{n+1}"] & \\ P'_{n+2} \arrow[r, "d'_{n+2}"] & \mathrm{Im}\, d'_{n+2} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad . \ \square$$

Le morphisme $f_* : (P_M)_* \to (P'_{M'})_*$ du théorème est appelé un *relèvement* de f. Le théorème dual, où les deux lignes sont formées de complexes ascendants, celle du haut étant exacte, et celle du bas formée de modules injectifs, est aussi vrai. Le morphisme de complexes ainsi obtenu à partir d'un morphisme (de modules) des premiers termes est dit être un *prolongement* de celui-ci. La démonstration, duale de la précédente, est laissée en guise d'exercice. Nous arrivons à la définition des foncteurs dérivés. Nous commençons par les foncteurs dérivés à gauche.

Soient A, B deux K-algèbres et $F : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, B$ un foncteur covariant K-linéaire. Pour un A-module M, soit

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de M. On applique F au complexe $(P_M)_*$, et on obtient un complexe

$$F(P_M)_* \qquad \cdots \longrightarrow FP_2 \xrightarrow{Fd_2} FP_1 \xrightarrow{Fd_1} FP_0 \longrightarrow 0.$$

Par définition, le $n^{\text{ème}}$ *foncteur dérivé à gauche* $F_n^{(s)}$ de F est défini sur l'objet M comme étant le $n^{\text{ème}}$ module d'homologie du complexe précédent

$$F_n^{(s)} M = H_n(F(P_M)_*) = \mathrm{Ker}(Fd_n)/\,\mathrm{Im}(Fd_{n+1}).$$

Il faut aussi définir l'action de $F_n^{(s)}$ sur un morphisme de A-modules $f : M_A \to M'_A$. Pour cela, on prend deux résolutions projectives de M et M', respectivement:

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

$$P'_* \qquad \cdots \longrightarrow P'_2 \xrightarrow{d'_2} P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} M' \longrightarrow 0$$

Il suit du théorème de comparaison (2.1) que le morphisme $f : M \to M'$ se relève en un morphisme $f_* : (P_M)_* \to (P'_{M'})_*$ de sorte que l'on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_0}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P'_2 & \xrightarrow{d'_2} & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{d'_0} & M' & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Si on applique F au diagramme précédent, on obtient un diagramme commutatif dont les lignes sont des complexes (mais ne sont généralement pas exactes: on n'a pas supposé que F est un foncteur exact)

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & FP_2 & \xrightarrow{Fd_2} & FP_1 & \xrightarrow{Fd_1} & FP_0 & \xrightarrow{Fd_0} & FM & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle Ff_2}\downarrow & & {\scriptstyle Ff_1}\downarrow & & {\scriptstyle Ff_0}\downarrow & & {\scriptstyle Ff}\downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & FP'_2 & \xrightarrow{Fd'_2} & FP'_1 & \xrightarrow{Fd'_1} & FP'_0 & \xrightarrow{Fd'_0} & FM' & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

On définit $F_n^{(s)} f : F_n^{(s)} M \to F_n^{(s)} M'$ comme étant le morphisme induit par Ff_* en homologie

$$(F_n^{(s)} f)(z_n + \mathrm{Im}(Fd_{n+1})) = (Ff_n)(z_n) + \mathrm{Im}(Fd'_{n+1})$$

où $z_n \in \mathrm{Ker}(Fd_n)$.

Pour que la définition de $F_n^{(s)}$ ait un sens, il nous reste quelques vérifications à effectuer.

(a) Pour un A-module M, le module $F_n^{(s)} M$ est défini sans ambiguïté, c'est-à-dire ne dépend pas du choix de la résolution projective de M. Soient en effet deux telles résolntions

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

$$P'_* \qquad \cdots \longrightarrow P'_2 \xrightarrow{d'_2} P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} M' \longrightarrow 0.$$

Le morphisme identité $1_M : M \to M$ et le théorème de comparaison (2.1) donnent deux morphismes $u_* : (P_M)_* \to (P'_M)_*$ et $v_* : (P'_M)_* \to (P_M)_*$ relevant 1_M et tels que $v_* u_* : (P_M)_* \to (P_M)_*$ et $u_* v_* : (P'_M)_* \to (P'_M)_*$ soient homotopes aux identités respectives. Mais alors, par (1.6)(c), on a que $F(v_* u_*) = F(v_*)F(u_*)$ et $F(u_* v_*) = F(u_*)F(v_*)$ sont aussi homotopes aux identités respectives, et, par (1.6)(b), on a également $H_n(F(v_*))H_n(F(u_*)) = 1$ et $H_n(F(u_*))H_n(F(v_*)) = 1$. En d'autres termes, $H_n(F(u_*)) : H_n(F(P_M)_*) \to H_n(F(P'_M)_*)$ et $H_n(F(v_*)) : H_n(F(P'_M)_*) \to H_n(F(P_M)_*)$ sont des isomorphismes mutuellement inverses. Cela montre bien que $F_n^{(s)} M = H_n(F(P_M)_*)$ ne dépend pas de la résolution projective choisie, et donc $F_n^{(s)}$ est correctement défini sur les objets.

(b) Pour un morphisme de A-modules $f : M \to M'$, le morphisme $F_n^{(s)} f : F_n^{(s)} M \to F_n^{(s)} M'$ est défini sans ambiguïté, c'est-à-dire ne dépend ni du choix de résolutions projectives pour M et M', ni du choix d'un relèvement de f à ces résolutions projectives. Soieut donc

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$P'_* \qquad \cdots \longrightarrow P'_2 \longrightarrow P'_1 \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

deux résolutions projectives pour M, et

$$Q_* \qquad \cdots \longrightarrow Q_2 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

$$Q'_* \qquad \cdots \longrightarrow Q'_2 \longrightarrow Q'_1 \longrightarrow Q'_0 \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

deux résolutions projectives pour M', et on suppose que $g_* : (P_M)_* \to (Q_{M'})_*$ et $h_* : (P'_M)_* \to (Q'_{M'})_*$ sout deux relèvements de $f : M \to M'$. On commence par considérer le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "g_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "1_{M'}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q'_1 \arrow[r] & Q'_0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Il suit du théorème de comparaison qu'il existe un morphisme $u_* : (Q_{M'})_* \to (Q'_{M'})_*$ relevant $1_{M'}$. Donc u_*g_* relève f.

De même, le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P'_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d, "h_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q'_1 \arrow[r] & Q'_0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et le théorème de comparaison donnent un morphisme $v_* : (P_M)_* \to (P'_M)_*$ relevant 1_M. Donc h_*v_* relève f. Une autre application du théorème de comparaison donne $u_*g_* \sim h_*v_*$. Par (1.6)(c),

$$F(u_*g_*) = F(u_*)F(g_*) \sim F(h_*)F(v_*) = F(h_*v_*)$$

d'où, par (1.6)(b), $H_n(F(u_*))H_n(F(g_*)) = H_n(F(h_*))H_n(F(v_*))$. Comme, par (a) plus haut, $H_n(F(u_*))$ et $H_n(F(v_*))$ sont des isomorphismes, on a fini.

Nous avons achevé de montrer que la définition précédente est correcte. Nous pouvons énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.2. *Soit* $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ *un foncteur* K*-linéaire covariant. Pour tout* $n \geq 1$, $F_n^{(s)} : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ *est un foncteur* K*-linéaire covariant.*

DÉMONSTRATION. Il reste à vérifier que

$$F_n^{(s)}(1) = 1 \text{ et } F_n^{(s)}(gf) = F_n^{(s)}(g)F_n^{(s)}(f)$$

ainsi que la linéarité de $F_n^{(s)}$, et c'est immédiat. □

Nous définissons maintenant la notion duale de foncteur dérivé à droite, puis verrons comment appliquer la suite exacte longue d'homologie aux foncteurs dérivés. Nous considérerons les foncteurs dérivés à droite dans deux cas, les définitions étaut entièrement analogues à celles des foncteurs dérivés à gauche. Ici, A et B sont deux K-algèbres.

(a) Le cas où $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ est un foncteur covariant K-linéaire.
Soieut N un A-module et

$$I^* \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^2} I^2 \longrightarrow \cdots$$

une résolution injective de N. On applique le foncteur F au complexe $(I_N)^*$ obtenu à partir de I^* en supprimant N. On obtient le complexe

$$F(I_N)^* \qquad 0 \longrightarrow FI^0 \xrightarrow{Fd^1} FI^1 \xrightarrow{Fd^2} FI^2 \longrightarrow \cdots .$$

Le $n^{\text{ème}}$ *foncteur dérivé à droite* $F_n^{(d)}$ de F est défini sur l'objet N comme étant le $n^{\text{ème}}$ module de cohomologie de ce complexe, c'est-à-dire

$$F_n^{(d)}N = H^n(F(I_N)^*) = \operatorname{Ker}(Fd^{n+1})/\operatorname{Im}(Fd^n).$$

On définit de façon évidente $F_n^{(d)}f : F_n^{(d)}N \to F_n^{(d)}N'$ pour une application A-linéaire $f : N \to N'$. On montre facilement que cette définition n'est pas ambigüe, puis le théorème suivant.

THÉORÈME 2.3. *Soit $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ un foncteur K-linéaire covariant. Pour tout $n \geq 1$, $F_n^{(d)} : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ est un foncteur K-linéaire covariant.*□

(b) Le cas où $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ est un foncteur contravariant K-linéaire.
Soient M un A-module et

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de M. On applique F au complexe $(P_M)_*$, ce qui donne le complexe ascendant

$$F(P_M)_* \qquad 0 \longrightarrow FP_0 \xrightarrow{Fd_1} FP_1 \xrightarrow{Fd_2} FP_2 \longrightarrow \cdots$$

Le $n^{\text{ème}}$ *foncteur dérivé à droite* $F_n^{(d)}$ de F est défini sur l'objet M comme étant le $n^{\text{ème}}$ module de cohomologie de ce complexe, c'est-à-dire

$$F_n^{(d)}M = H^n(F(P_M)_*) = \operatorname{Ker}(Fd_{n+1})/\operatorname{Im}(Fd_n).$$

On définit de façon évidente $F_n^{(d)}f : F_n^{(d)}M \to F_n^{(d)}M'$ pour une application A-linéaire $f : M \to M'$. On montre facilement que cette définition n'est pas ambigüe, puis le théorème suivant.

THÉORÈME 2.4. *Soit* $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ *un foncteur* K*-linéaire contravariant. Pour tout* $n \geq 1$, $F_n^{(d)} : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ *est un foncteur* K*-linéaire contravariant.* $\square$

Nous aurons besoin du lemme suivant, qui n'est autre qu'uue reformulation de l'exercice (IV.4).

LEMME 2.5 (DU FER À CHEVAL). *Soit un diagramme à ligne exacte*

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \\ & P_1' \arrow[d, "d_1'"'] & & P_1'' \arrow[d, "d_1''"] & \\ & P_0' \arrow[d, "d_0'"'] & & P_0'' \arrow[d, "d_0''"] & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

où les colonnes sont des résolutions projectives. Alors il existe une résolution projective

$$P_* \qquad\qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

de M, *et des morphismes* $f_* : (P'_{M'})_* \to (P_M)_*$, $g_* : (P_M)_* \to (P''_{M''})_*$ *relevant respectivement* f, g *et tels que la suite*

$$0 \longrightarrow (P'_{M'})_* \xrightarrow{f_*} (P_M)_* \xrightarrow{g_*} (P''_{M''})_* \longrightarrow 0$$

soit une suite exacte de complexes.

DÉMONSTRATION. Par récurrence, il suffit de compléter le diagramme à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\ & L' \arrow[d, "d'"'] & & L'' \arrow[d, "d''"] & \\ & P_0' \arrow[d, "d_0'"'] & & P_0'' \arrow[d, "d_0''"] & \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

où $L' = \operatorname{Ker} d'_0$, $L'' = \operatorname{Ker} d''_0$, $d' = \ker d'_0$ et $d'' = \ker d''_0$. On prend $P_0 = P'_0 \oplus P''_0$, on définit $f_0 : P'_0 \to P_0$ par $f_0 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ et $g_0 : P_0 \to P''_0$ par $g_0 = \left[\begin{smallmatrix}0 & 1\end{smallmatrix}\right]$. Il est clair que P_0 est projectif, et que la suite

$$0 \longrightarrow P'_0 \xrightarrow{f_0} P_0 \xrightarrow{g_0} P''_0 \longrightarrow 0$$

est exacte. La projectivité de P''_0 entraîne l'existence d'un morphisme $h : P''_0 \to M$ tel que $d''_0 = gh$. On définit $d_0 : P_0 \to M$ par

$$d_0 = fd'_0 \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} + h \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}.$$

On affirme que d_0 est surjective. En effet, si $x \in M$, alors $g(x) = d''_0(y'')$ pour un $y'' \in P''_0$ et donc $g(x) = gh(y'')$ ce qui entraîne $x - h(y'') \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Il existe donc $y' \in P'_0$ tel que $x - h(y'') = fd'_0(y')$. Par conséquent,

$$x = fd'_0 \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}y' \\ y''\end{bmatrix} + h \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}y' \\ y''\end{bmatrix} = d_0 \begin{bmatrix}y' \\ y''\end{bmatrix}.$$

Il reste à vérifier la commutativité des deux carrés inférieurs, or $gd_0 = gh \left[\begin{smallmatrix}0 & 1\end{smallmatrix}\right] = d''_0 \left[\begin{smallmatrix}0 & 1\end{smallmatrix}\right] = d''_0 g_0$, tandis que $d_0 f_0 = fd'_0 \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] + h \left[\begin{smallmatrix}0 & 1\end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] = fd'_0$.

Prenant $L = \operatorname{Ker} d_0$, $d = \ker d_0$, on obtient un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & L' \arrow[d, "d'"'] & L \arrow[d, "d"'] & L'' \arrow[d, "d''"'] & \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "d'_0"'] & P_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "d_0"'] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "d''_0"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Il u'y a plus qu'à appliquer le lemme du serpent (II.3.6). □

On laisse au lecteur le soin d'énoncer et de prouver le dual du lemme précédent.

THÉORÈME 2.6. *Soient* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de A-modules, et $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ un foncteur K-linéaire covariant. Il existe une suite exacte*

$$\cdots \longrightarrow F_n^{(s)} M' \longrightarrow F_n^{(s)} M \longrightarrow F_n^{(s)} M'' \xrightarrow{\delta} F_{n-1}^{(s)} M' \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow F_0^{(s)} M' \longrightarrow F_0^{(s)} M \longrightarrow F_0^{(s)} M'' \longrightarrow 0$$

avec tous les morphismes fonctoriels.

DÉMONSTRATION. Soient

$$P'_* \qquad \cdots \longrightarrow P'_2 \longrightarrow P'_1 \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

$$\text{et } P''_* \qquad \cdots \longrightarrow P''_2 \longrightarrow P''_1 \longrightarrow P''_0 \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

des résolutions projectives de M' et M'', respectivement. Le lemme du fer à cheval (2.5) donne une résolution projective

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de M telle que l'on a une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow (P'_{M'})_* \xrightarrow{f_*} (P_M)_* \xrightarrow{g_*} (P''_{M''})_* \longrightarrow 0.$$

Chaque ligne de la suite exacte précédente

$$0 \longrightarrow P'_n \xrightarrow{f_n} P_n \xrightarrow{g_n} P''_n \longrightarrow 0$$

est scindée, puisque P''_n est un A-module projectif. Par conséquent, pour chaque $n \geq 0$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow FP'_n \xrightarrow{Ff_n} FP_n \xrightarrow{Fg_n} FP''_n \longrightarrow 0$$

d'où une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow F(P'_{M'})_* \xrightarrow{Ff_*} F(P_M)_* \xrightarrow{Fg_*} F(P''_{M''})_* \longrightarrow 0.$$

Appliquant le théorème (1.4), on obtient la suite exacte longue d'homologie suivante, où tous les morphismes sont fonctoriels

$$\cdots \to H_n(F(P'_{M'})_*) \to H_n(F(P_M)_*) \to H_n(F(P''_{M''})_*) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(F(P'_{M'})_*) \to \cdots$$

(δ est le morphisme de liaison). C'est bien la suite cherchée. Elle s'arrête en $F_0^{(s)}M'' = H_0(F(P''_{M''})_*)$ car $P'_{-1} = 0$ donne $H_{-1}(FP'_{-1}) = 0$. □

On note qu'on a prouvé que, pour tout foncteur covariant F, le 0ème foncteur dérivé à gauche $F_0^{(s)}$ est exact à droite.

THÉORÈME 2.7. *Soient* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de A-modules, et $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ un foncteur K-linéaire covariant. Il existe une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow F_0^{(d)}M' \longrightarrow F_0^{(d)}M \longrightarrow F_0^{(d)}M'' \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow F_n^{(d)}M' \longrightarrow F_n^{(d)}M \longrightarrow F_n^{(d)}M'' \xrightarrow{\delta} F_{n+1}^{(d)}M' \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

avec tous les morphismes fonctoriels. □

En particulier, pour tout foncteur covariant F, le 0ième foncteur dérivé à droite $F_0^{(d)}$ est exact à gauche. Le cas contravariant se traite de même.

THÉORÈME 2.8. *Soient* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de* A*-modules, et* $F : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} B$ *un foncteur* K*-linéaire contravariant. Il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow F_0^{(d)} M'' \longrightarrow F_0^{(d)} M \longrightarrow F_0^{(d)} M' \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow F_n^{(d)} M'' \longrightarrow F_n^{(d)} M \longrightarrow F_n^{(d)} M' \xrightarrow{\delta} F_{n+1}^{(d)} M'' \longrightarrow \cdots$$

avec tous les morphismes fonctoriels. □

En particulier, $F_0^{(d)}$ est encore exact à gauche.

3. Foncteurs d'extension.

Nous considérons maintenant les foncteurs dérivés à droite des foncteurs Hom. Comme Hom est un bifoncteur, contravariant en sa première variable et covariant en sa seconde, les constructions de la section précédente donnent, pour chaque $n \geq 0$, deux foncteurs. Le résultat principal de cette section énonce que ces deux constructions sont compatibles: on obtient en fait, pour chaque $n \geq 0$, un bifoncteur contravariant en sa première variable et covariant en sa seconde.

Soit M un A-module. Le foncteur $\operatorname{Hom}_A(M, -) : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} K$ est covariant. Le $n^{\text{ème}}$ foucteur dérivé à droite de $\operatorname{Hom}_A(M, -)$ sera noté (provisoirement) $E^n(M, -)$. L'image d'un A-module N sera notée $E^n(M, -)(N) = E^n(M, N)$. Ainsi, pour calculer $E^n(M, N)$, on commence par considérer une résolution injective de N:

$$I^* \qquad\qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^2} I^2 \longrightarrow \cdots .$$

Alors $E^n(M, N)$ est égal au $n^{\text{ème}}$ module de cohomologie du complexe de K-modules $\operatorname{Hom}_A(M, (I_N)^*)$:

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(M, I^0) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(M, d^1)} \operatorname{Hom}_A(M, I^1) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(M, d^2)} \operatorname{Hom}_A(M, I^2) \to \cdots$$

c'est-à-dire

$$E^n(M, N) = H^n(\operatorname{Hom}_A(M, (I_N)^*) = \operatorname{Ker} \operatorname{Hom}_A(M, d^{n+1}) / \operatorname{Im} \operatorname{Hom}_A(M, d^n)$$

et ce module ne dépend pas du choix de la résolution injective initiale. On a montré en (2.7) que si $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte dans $\operatorname{Mod} A$, il existe une suite exacte longue de cohomologie dans $\operatorname{Mod} K$

$$0 \longrightarrow E^0(M, N') \longrightarrow E^0(M, N) \longrightarrow E^0(M, N'') \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow E^n(M, N') \longrightarrow E^n(M, N) \longrightarrow E^n(M, N'') \xrightarrow{\delta} E^{n+1}(M, N') \longrightarrow \cdots$$

avec tous les morphismes fonctoriels.

En particulier, $E^0(M, -)$ est exact à gauche et $E^n(M, -) = 0$ pour tout $n < 0$.

Soit maintenant N un A-module. Le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-, N) : \operatorname{Mod} A \to \operatorname{Mod} K$ est contravariant. Le $n^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à droite de $\operatorname{Hom}_A(-, N)$ sera noté (provisoirement) $E_n(-, N)$. L'image d'un A-module M sera notée

$E_n(-,N)(M) = E_n(M,N)$. Ainsi, pour calculer $E_n(M,N)$, on commence par considérer une résolution projective de M:

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

Alors $E_n(M,N)$ est égal au $n^{\text{ème}}$ module de cohomologie du complexe de K-modules $\mathrm{Hom}_A((P_M)_*,N)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(d_1,N)} \mathrm{Hom}_A(P_1,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(d_2,N)} \mathrm{Hom}_A(P_2,N) \to \cdots$$

c'est-à-dire

$$E_n(M,N) = H^n(\mathrm{Hom}_A((P_M)_*,N) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(d_{n+1},N)/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_n,N)$$

et ce module ne dépend pas du choix de la résolution projective initiale. On a montré en (2.8) que si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte dans $\mathrm{Mod}\,A$, il existe une suite exacte longue de cohomologie dans $\mathrm{Mod}\,K$

$$0 \to E_0(M'',N) \longrightarrow E_0(M,N) \longrightarrow E_0(M',N) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow E_n(M'',N) \longrightarrow E_n(M,N) \longrightarrow E_n(M',N) \xrightarrow{\delta} E_{n+1}(M'',N) \to \cdots$$

avec tous les morphismes fonctoriels. En particulier, $E_0(-,N)$ est exact à gauche et $E_n(-,N) = 0$ pour $n < 0$.

Notre objectif présent est de montrer l'existence d'isomorphismes $E^n(M,N) \xrightarrow{\sim} E_n(M,N)$ pour tout $n \geq 0$, fonctoriels en M et N.

Lemme 3.1. (a) *Pour tout A-module M, il existe un isomorphisme de foncteurs $E^0(M,-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M,-)$.*

(b) *Pour tout A-module N, il existe un isomorphisme de foncteurs $E_0(-,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(-,N)$.*

Démonstration. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. Soient N un A-module et

$$I^* \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^2} I^2 \longrightarrow \cdots$$

une résolution injective de N. Alors on a $\mathrm{Hom}_A(M,(I_N)^*)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,I^0) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,d^1)} \mathrm{Hom}_A(M,I^1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,d^2)} \mathrm{Hom}_A(M,I^2) \to \cdots$$

et $E^0(M,N) = H^0(\mathrm{Hom}_A(M,(I_N)^*) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(M,d^1)$. Par contre, en appliquant $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1$$

on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,d^0)} \mathrm{Hom}_A(M,I^0) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,d^1)} \mathrm{Hom}_A(M,I^1)$$

d'où $\mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(M,d^1)$. On a l'isomorphisme cherché. Il reste à montrer sa fonctorialité. Soient donc $f : N \to N'$ un morphisme de A-modules et

$$I'^* \qquad 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{d'^0} I'^0 \xrightarrow{d'^1} I'^1 \xrightarrow{d'^2} I'^2 \longrightarrow \cdots$$

une résolution injective de N'. Le dual du théorème de comparaison (2.1) donne un morphisme de complexes $f^* : (I_N)^* \to (I'_{N'})^*$ prolongeant f et unique à homotopie près. En particulier, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{d^0} & I^0 & \xrightarrow{d^1} & I^1 \\ & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle f^0}\big\downarrow & & {\scriptstyle f^1}\big\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{d'^0} & I'^0 & \xrightarrow{d'^1} & I'^1 \end{array} .$$

Appliquant $\mathrm{Hom}_A(M,-)$, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,d^0)} & \mathrm{Hom}_A(M,I^0) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,d^1)} & \mathrm{Hom}_A(M,I^1) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(M,f)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(M,f^0)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Hom}_A(M,f^1)}\big\downarrow \\ 0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N') & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,d'^0)} & \mathrm{Hom}_A(M,I'^0) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,d'^1)} & \mathrm{Hom}_A(M,I'^1) \end{array} .$$

Le résultat s'ensuit. □

LEMME 3.2. (a) *Si N est injectif, alors $E^n(M,N) = 0$ pour tout A-module M et tout $n \geq 1$.*

(b) *Si M est projectif, alors $E_n(M,N) = 0$ pour tout A-module N et tout $n \geq 1$.*

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. Le A-module N étant injectif, une résolution injective I^* de N est donnée par $0 \longrightarrow N \xrightarrow{1} N \longrightarrow 0$ (c'est-à-dire $I^0 = N$ et $I^n = 0$ pour $n \neq 0$). On a bien $E^n(M,N) = H^n(\mathrm{Hom}_A(M,(I_N)^*) = 0$ pour $n \neq 0$, et ceci pour tout A-module M. □

LEMME 3.3 (DE DÉCALAGE). (a) *Soient M, N deux A-modules et*

$$I^* \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^2} I^2 \longrightarrow \cdots$$

une résolution injective de N. Posant $L^n = \mathrm{Im}\, d^{n+1}$ pour $n \geq 0$, on a des isomorphismes fonctoriels

$$E^{n+1}(M,N) \xrightarrow{\sim} E^n(M,L^0) \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} E^1(M,L^{n-1}).$$

(b) *Soient M, N deux A-modules et*

$$P_* \qquad \cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de M. Posant $L_n = \mathrm{Ker}\, d_n$ pour $n \geq 0$, on a des isomorphismes fonctoriels

$$E_{n+1}(M,N) \xrightarrow{\sim} E_n(L_0,N) \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} E_1(L_{n-1},N).$$

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. Par récurrence, il suffit de montrer le premier isomorphisme $E^{n+1}(M,N) \xrightarrow{\sim} E^n(M,L^0)$. La résolution injective I^* de N induit une résolution injective I'^* de L^0:

$$I'^* \qquad\qquad 0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow I^1 \xrightarrow{d^2} I^2 \longrightarrow \cdots .$$

Appliquant $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ au complexe $(I'_{L^0})^*$, on obtient le complexe $\mathrm{Hom}_A(M,(I'_{L^0})^*)$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,I^1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,d^2)} \mathrm{Hom}_A(M,I^2) \longrightarrow \cdots .$$

Donc

$$\begin{aligned} E^n(M,L^0) &= H^n(\mathrm{Hom}_A(M,(I'_{L^0})^*) \\ &= \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(M,d^{n+2})/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(M,d^{n+1}) \\ &\xrightarrow{\sim} H^{n+1}(\mathrm{Hom}_A(M,(I_N)^*) \\ &= E^{n+1}(M,N). \end{aligned}$$

Enfin, la fonctorialité est évidente. □

Le lecteur voit de suite comment les lemmes précédents se combinent pour montrer que l'on a des isomorphismes fonctoriels $E^n(M,N) \xrightarrow{\sim} E_n(M,N)$ pour tous M, N et n. En effet, par décalage, on se ramène au cas $n = 1$, et là, on doit utiliser (3.1) et (3.2).

THÉORÈME 3.4. *Soient M, N deux A-modules et*

$$I^* \qquad\qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

$$P_* \qquad\qquad \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

respectivement une résolution injective de N et une résolution projective de M. Pour tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme

$$H^n(\mathrm{Hom}_A(M,(I_N)^*) \xrightarrow{\sim} H^n(\mathrm{Hom}_A((P_M)_*,N))$$

fonctoriel en M et N. En d'autres termes $E^n(M,N) \xrightarrow{\sim} E_n(M,N)$.

DÉMONSTRATION. Pour appliquer le lemme de décalage, on aura besoin des noyaux de I^* et P_*. Posons $U_i = \mathrm{Ker}\, d_i$ et $V^j = \mathrm{Im}\, d^{j+1}$, on a des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow U_i \longrightarrow P_i \longrightarrow U_{i-1} \longrightarrow 0$$

avec $i \geq 0$ et $U_{-1} = M$, et

$$0 \longrightarrow V^{j-1} \longrightarrow I^j \longrightarrow V^j \longrightarrow 0$$

avec $j \geq 0$ et $V^{-1} = N$. On en déduit un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(U_{i-1},V^{j-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(U_{i-1},I^j) \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(U_{i-1},V^j) \arrow[r] \arrow[d] & E^1(U_{i-1},V^{j-1}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_i,V^{j-1}) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_A(P_i,I^j) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Hom}_A(P_i,V^j) \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(U_i,V^{j-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(U_i,I^j) \arrow[r, "w"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(U_i,V^j) \arrow[r] \arrow[d] & E^1(U_i,V^{j-1}) \arrow[r] & 0 \\
 & E_1(U_{i-1},V^{j-1}) \arrow[d] & 0 & E_1(U_{i-1},V^j) \arrow[d] & & \\
 & 0 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent (II.3.6) appliqué à f, g, h donne une suite exacte

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(U_{i-1}, V^{j-1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(U_{i-1}, I^j) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}_A(U_{i-1}, V^j) \longrightarrow \\
\longrightarrow E_1(U_{i-1}, V^{j-1}) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Donc $E_1(U_{i-1}, V^{j-1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\, u \xrightarrow{\sim} E^1(U_{i-1}, V^{j-1})$. Si on pose $i = j = 0$, cela montre l'énoncé pour $n = 1$. Comme, d'autre part, v et g sont des épimorphismes, on a

$$\begin{aligned}
E_1(U_{i-1}, V^j) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\, h \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\, hv \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\, wg \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\, w \\
&\xrightarrow{\sim} E^1(U_i, V^{j-1}).
\end{aligned}$$

Cela entraîne l'énoncé cherché, par décalage: en effet, si $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
E^{n+1}(M, N) &\xrightarrow{\sim} E^n(M, V^0) \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} E^1(M, V^{n-1}) \\
&\xrightarrow{\sim} E^1(U_{-1}, V^{n-1}) \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} E^1(U_{n-1}, V^{-1}) \\
&\xrightarrow{\sim} E_1(U_{n-1}, N) \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} E_{n+1}(M, N).
\end{aligned}$$

Ces isomorphismes étant obtenus à partir des isomorphismes fonctoriels des lemmes précédents, ils sont aussi fonctoriels. □

DÉFINITION. Soient M, N deux A-modules. La valeur commune de $E^n(M, N)$ et $E_n(M, N)$ est appelée $n^{ème}$ *module d'extension* de N par M. Elle est notée $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$.

Nous avons bien montré que $\mathrm{Ext}_A^n(-,-)$ est un bifoncteur, covariant en sa seconde variable et contravariant en sa première. Nous avons aussi prouvé le théorème suivant.

THÉORÈME 3.5. (a) *Soient M un A-module, et $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de* $\mathrm{Mod}\, A$. *Il existe une suite exacte longue de cohomologie dans* $\mathrm{Mod}\, K$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N') \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_A^1(M,N') \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_A^n(M,N') \to \mathrm{Ext}_A^n(M,N) \to \mathrm{Ext}_A^n(M,N'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,N') \to \cdots$$

avec tous les morphismes fonctoriels.

(b) *Soient N un A-module, et $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de* $\mathrm{Mod}\, A$. *Il existe une suite exacte longue de cohomologie dans* $\mathrm{Mod}\, K$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'',N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M',N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_A^1(M'',N) \to \cdots$$

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_A^n(M'',N) \to \mathrm{Ext}_A^n(M,N) \to \mathrm{Ext}_A^n(M',N) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M'',N) \to \cdots$$

avec tous les morphismes fonctoriels. $\square$

Le théorème précédent précise la phrase écrite dans l'introduction à ce chapitre: le foncteur Ext corrige le manque d'exactitude à droite du foncteur Hom. On laisse au lecteur le soin de reformuler les lemmes (3.1) et (3.3) avec la notation Ext. Pour notre part, nous montrerons la généralisation suivante du lemme (3.2).

THÉORÈME 3.6. (a) *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un A-module N:*

(i) *N est injectif.*
(ii) $\mathrm{Ext}_A^1(-,N) = 0$.
(iii) $\mathrm{Ext}_A^n(-,N) = 0$ *pour tout* $n \geq 1$.

(b) *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un A-module M:*

(i) *M est projectif.*
(ii) $\mathrm{Ext}_A^1(M,-) = 0$.
(iii) $\mathrm{Ext}_A^n(M,-) = 0$ *pour tout* $n \geq 1$.

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. On a prouvé en (3.2) que (i) implique (iii). Comme il est clair que (iii) implique (ii), il reste à montrer que (ii) implique (i). Supposons donc le A-module N tel que $\mathrm{Ext}_A^1(-,N) = 0$. Pour montrer que N est injectif, il suffit, par (IV.3.3), de montrer que toute suite exacte courte de la forme

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} V \longrightarrow 0$$

est scindée. Or une telle suite exacte de $\mathrm{Mod}\, A$ induit, par (3.5), une suite exacte de $\mathrm{Mod}\, K$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(U,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,N)} \mathrm{Hom}_A(N,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(V,N) = 0.$$

Par conséquent, $\mathrm{Hom}_A(f,N)$ est surjective et il existe $f' : U \to N$ tel que $1_N = \mathrm{Hom}_A(f,N)(f') = f'f$. Cela montre bien que f est une section. □

Enfin, Ext se comporte comme Hom vis-à-vis des sommes et des produits.

THÉORÈME 3.7. (a) *Soient N un A-module, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules et $n \geq 0$. On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Ext}^n_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}^n_A(M_\lambda, N).$$

(b) *Soient M un A-module, $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules et $n \geq 0$. On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Ext}^n_A(M, \prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}^n_A(M, N_\lambda).$$

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. Le cas $n = 0$ a déjà été vu en (III.2.6). Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow L_\lambda \longrightarrow P_\lambda \longrightarrow M_\lambda \longrightarrow 0$$

avec P_λ projectif. On en déduit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \longrightarrow \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \longrightarrow 0$$

où $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ est projectif, par (IV.2.3). Appliquant $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ à chacune de ces suites et en utilisant l'isomorphisme connu dans le cas $n = 0$, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda, N) & \to & \mathrm{Hom}_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda, N) & \to & \mathrm{Ext}^1_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N) & \to & 0 \\
\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & & & \\
\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_A(P_\lambda, N) & \to & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_A(L_\lambda, N) & \to & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}^1_A(M_\lambda, N) & \to & 0
\end{array}$$

d'où, par passage aux conoyaux, un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}^1_A(M_\lambda, N).$$

Cela prouve l'énoncé pour $n = 1$. Si $n > 1$, on a un diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{n-1}_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda, N) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^n_A(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow\wr & & & & \\
0 & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}^{n-1}_A(L_\lambda, N) & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}^{n-1}_A(M_\lambda, N) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

d'où le résultat. □

On note que, si M (ou N) est un bimodule, il suit alors des définitions que $\mathrm{Ext}^n_A(M,N)$ acquiert une structure induite de module. Les isomorphismes précédents deviennent alors des isomorphismes pour cette structure iuduite. On achève cette section avec un exemple de calcul.

EXEMPLE 3.8. Soient A une K-algèbre et $a \in A$ qui n'est pas un diviseur de zéro à gauche. Cette condition revient à dire que l'application A-linéaire $f : A_A \to A_A$ définie par $f(x) = ax$ (pour $x \in A$) est injective. On en déduit l'existence d'une suite exacte courte de A-modules

$$0 \longrightarrow A_A \xrightarrow{f} A_A \longrightarrow A/aA \longrightarrow 0.$$

Soit maintenant M un A-module arbitraire. Si on applique à la suite précédente le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, M)$, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A/aA, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,M)} \mathrm{Hom}_A(A, M) \longrightarrow \\ \mathrm{Ext}^1_A(A/aA, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A, M) = 0$$

où le dernier terme s'annule car A_A est projectif. Il suit alors de l'isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_A(A, -) \xrightarrow{\sim} 1_{\mathrm{Mod}\,A}$ que l'on a une suite exacte

$$M \xrightarrow{\overline{f}} M \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A/aA, M) \longrightarrow 0$$

où $\overline{f}(m) = ma$ (pour $m \in M$) et le K-module $\mathrm{Ext}^1_A(A/aA, M)$ est donc isomorphe au conoyau M/Ma de $\overline{f}$. Si A est commutatif, cet isomorphisme est un isomorphisme de A-modules. Par exemple, pour tout entier $n \geq 1$ et tout groupe abélien G, on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G) \xrightarrow{\sim} G/nG$.

4. Foncteurs de torsion.

Nous voulons maintenant étudier les foncteurs dérivés à gauche du produit tensoriel. Ce dernier étant un bifoncteur, covariant en chaque variable, on verra qu'il en est de même pour ses foncteurs dérivés à gauche.

Soit M un A-module. Le foucteur $M \otimes_A - : \mathrm{Mod}\,A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}\,K$ est covariant. Le $n^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à gauche de $M \otimes_A -$ sera noté (provisoirement) $T^n(M, -)$. L'image d'un A^{op}-module ${}_AN$ sera notée $T^n(M, -)(N) = T^n(M, N)$. Ainsi, pour calculer $T^n(M, N)$, on considère une résolution projective de ${}_AN$ dans $\mathrm{Mod}\,A^{\mathrm{op}}$

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} N \longrightarrow 0.$$

Alors $T^n(M, N)$ est égal au $n^{\text{ème}}$ module d'homologie du complexe de K-modules

$$M \otimes (P_N)_* \qquad \cdots \longrightarrow M \otimes P_2 \xrightarrow{M\otimes d_2} M \otimes P_1 \xrightarrow{M\otimes d_1} M \otimes P_0 \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire

$$T^n(M, N) = H_n(M \otimes (P_N)_*) = \mathrm{Ker}(M \otimes d_n) / \mathrm{Im}(M \otimes d_{n+1})$$

et ce module ne dépend pas du choix de la résolution projective initiale. On a montré en (2.6) que, si $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte de $\mathrm{Mod}\,A^{\mathrm{op}}$, il existe une suite exacte longue d'homologie de $\mathrm{Mod}\,K$

$$\cdots \longrightarrow T^{n+1}(M, N'') \xrightarrow{\delta} T^n(M, N') \longrightarrow T^n(M, N) \longrightarrow T^n(M, N'') \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow T^1(M, N'') \xrightarrow{\delta} T^0(M, N') \longrightarrow T^0(M, N) \longrightarrow T^0(M, N'') \longrightarrow 0$$

avec tous les morphismes fonctoriels. En particulier, $T^0(M,-)$ est exact à droite et $T^n(M,-) = 0$ pour tout $n < 0$.

Soit maintenant N un A-module à gauche. Le foncteur $- \otimes_A N : \operatorname{Mod} A \longrightarrow \operatorname{Mod} K$ est covariant. Le $n^{\text{ème}}$ foncteur dérivé à gauche de $-\otimes_A N$ sera noté (provisoirement) $T_n(-,N)$. L'image d'un A-module M sera notée $T_n(-,N)(M) = T_n(M,N)$. Ainsi, pour calculer $T_n(M,N)$, on considère une résolution projective de M dans $\operatorname{Mod} A$

$$P_* \qquad\qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0.$$

Alors $T_n(M,N)$ est égal au $n^{\text{ème}}$ module d'homologie du complexe de K-modules

$$(P_M)_* \otimes N \qquad\qquad \cdots \longrightarrow P_2 \otimes N \xrightarrow{d_2 \otimes N} P_1 \otimes N \xrightarrow{d_1 \otimes N} P_0 \otimes N \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire

$$T_n(M,N) = H_n((P_M)_* \otimes N) = \operatorname{Ker}(d_n \otimes N) / \operatorname{Im}(d_{n+1} \otimes N)$$

et ce module ne dépend pas du choix de la résolution projective initiale. On a montré en (2.6) que, si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte courte de $\operatorname{Mod} A$, il existe une suite exacte longue d'homologie de $\operatorname{Mod} K$

$$\begin{gathered} \cdots \longrightarrow T_{n+1}(M'',N) \xrightarrow{\delta} T_n(M',N) \longrightarrow T_n(M,N) \longrightarrow T_n(M'',N) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow T_1(M'',N) \xrightarrow{\delta} T_0(M',N) \longrightarrow T_0(M,N) \longrightarrow T_0(M'',N) \longrightarrow 0 \end{gathered}$$

avec tous les morphismes fonctoriels. En particulier, $T_0(-,N)$ est exact à droite et $T_n(-,N) = 0$ pour tout $n < 0$.

Notre objectif présent est de montrer la compatibilité de ces deux constructions, c'est-à-dire l'existence d'isomorphismes $T^n(M,N) \xrightarrow{\sim} T_n(M,N)$ pour tout $n \geq 0$, fonctoriels en M et en N. On procédera comme à la section 3.

LEMME 4.1. (a) *Pour tout A-module M, il existe un isomorphisme de foncteurs $T^0(M,-) \xrightarrow{\sim} M \otimes_A -$.*

(b) *Pour tout A^{op}-module N, il existe un isomorphisme de foncteurs $T_0(-,N) \xrightarrow{\sim} - \otimes_A N$.*

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. Soient N un A-module à gauche et

$$P_* \qquad\qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} N \longrightarrow 0$$

une résolution projective de N. Alors on a le complexe $M \otimes (P_N)_*$

$$\cdots \longrightarrow M \otimes P_2 \xrightarrow{M \otimes d_2} M \otimes P_1 \xrightarrow{M \otimes d_1} M \otimes P_0 \longrightarrow 0$$

et $T^0(M,N) = H_0(M \otimes (P_N)_*) = (M \otimes P_0)/\operatorname{Im}(M \otimes d_1) = \operatorname{Coker}(M \otimes d_1)$. Par contre, en appliquant $M \otimes_A -$ à la suite exacte

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} N \longrightarrow 0$$

on obtient une suite exacte

$$M \otimes P_1 \xrightarrow{M\otimes d_1} M \otimes P_0 \xrightarrow{M\otimes d_0} M \otimes N \longrightarrow o.$$

Par conséquent, $M \otimes N \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker}(M \otimes d_1) \xrightarrow{\sim} T^0(M,N)$. On a l'isomorphisme cherché. On vérifie aisément la fonctorialité. $\square$

LEMME 4.2. (a) *Si M_A est plat (par exemple projectif), alors $T^n(M,N) = 0$ pour tout A^{op}-module N et tout $n \geq 1$.*

(b) *Si ${}_AN$ est plat (par exemple projectif), alors $T_n(M,N) = 0$ pour tout A-module M et tout $n \geq 1$.*

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. Soient N un A^{op}-module et

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

une résolution projective. Comme M est plat, le foncteur $M \otimes_A -$ est exact. Par conséquent, le complexe $M \otimes P_*$ est exact et donc $M \otimes (P_N)_*$ est exact en tout degré ≥ 1. Donc $T^n(M,N) = H_n(M \otimes (P_N)_*) = 0$ pour tout $n \geq 1$. $\square$

LEMME 4.3 (DE DÉCALAGE). (a) *Soient M un A-module, N un A^{op}-module et*

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} N \longrightarrow 0$$

une résolution projective. Posant $L_n = \operatorname{Ker} d_n$ pour $n \geq 0$, on a des isomorphismes fonctoriels

$$T^{n+1}(M,N) \xrightarrow{\sim} T^n(M,L_0) \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} T^1(M,L_{n-1}).$$

(b) *Soient N un A-module, M un A^{op}-module et*

$$P'_* \qquad \cdots \longrightarrow P'_2 \xrightarrow{d'_2} P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} M \longrightarrow 0$$

une résolution projective. Posant $L'_n = \operatorname{Ker} d'_n$ pour $n \geq 0$, on a des isomorphismes fonctoriels

$$T_{n+1}(M,N) \xrightarrow{\sim} T_n(L'_0,N) \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} T_1(L'_{n-1},N).$$

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. Par récurrence, il suffit de montrer le premier isomorphisme $T^{n+1}(M,N) \xrightarrow{\sim} T^n(M,L_0)$. La résolution projective P_* de N induit une résolution projective P'_* de L_0:

$$P'_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0.$$

Appliquant $M \otimes_A -$ au complexe $(P'_{L_0})_*$, on obtient

$$M \otimes (P'_{L_0})_* \qquad \cdots \longrightarrow M \otimes P_2 \xrightarrow{M\otimes d_2} M \otimes P_1 \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} T^n(M, L_0) &= H_n(M \otimes (P_{L_0})_*) \\ &= \operatorname{Ker}(M \otimes d_{n+1}) / \operatorname{Im}(M \otimes d_{n+2}) \\ &\xrightarrow{\sim} H_{n+1}(M \otimes (P_N)_*) \\ &= T^{n+1}(M, N). \end{aligned}$$

Enfin, la fonctorialité est évidente. □

Nous pouvons enfin énoncer le résultat principal de cette section.

THÉORÈME 4.4. *Soient M un A-module, N un A^{op}-module et*

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$P'_* \qquad \cdots \longrightarrow P'_2 \longrightarrow P'_1 \longrightarrow P'_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

respectivement une résolution projective de M et une résolution projective de N. Pour tout $n \geq 0$, on a un isomorphisme

$$H_n(M \otimes (P'_N)_*) \xrightarrow{\sim} H_n((P_M)_* \otimes N)$$

fonctoriel en M et N. En d'autres termes, $T^n(M, N) \xrightarrow{\sim} T_n(M, N)$.

DÉMONSTRATION. Semblable à celle du théorème (3.4) et laissée en exercice. □

DÉFINITION. Soient M un A-module et N un A^{op}-module. La valeur commune de $T^n(M, N)$ et $T_n(M, N)$ est appelée $n^{\text{ème}}$ *module de torsion* de M et N. Elle est notée $\operatorname{Tor}_n^A(M, N)$.

Nous avons bien montré que $\operatorname{Tor}_n^A(-,-)$ est un bifoncteur, covariant en chacune de ses deux variables. Nous avons aussi prouvé le théorème suivant.

THÉORÈME 4.5. (a) *Soient M un A-module, et $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de* $\operatorname{Mod} A^{\mathrm{op}}$. *Il existe une suite exacte longue d'homologie dans* $\operatorname{Mod} K$

$$\begin{aligned} \cdots \to \operatorname{Tor}_{n+1}^A(M, N'') \xrightarrow{\delta} \operatorname{Tor}_n^A(M, N') \to \operatorname{Tor}_n^A(M, N) \to \operatorname{Tor}_n^A(M, N'') \to \cdots \\ \cdots \to \operatorname{Tor}_1^A(M, N'') \xrightarrow{\delta} M \otimes N' \to M \otimes N \to M \otimes N'' \to 0 \end{aligned}$$

avec tous les morphismes fonctoriels.

(b) *Soient N un A^{op}-module, et $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de* $\operatorname{Mod} A$. *Il existe une suite exacte longue d'homologie dans* $\operatorname{Mod} K$

$$\begin{aligned} \cdots \to \operatorname{Tor}_{n+1}^A(M'', N) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Tor}_n^A(M', N) \to \operatorname{Tor}_n^A(M, N) \to \operatorname{Tor}_n^A(M'', N) \to \cdots \\ \cdots \to \operatorname{Tor}_1^A(M'', N) \xrightarrow{\delta} M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0 \end{aligned}$$

avec tous les morphismes fonctoriels. □

Comme on le voit, le foncteur Tor corrige le manque d'exactitude à gauche du foncteur produit tensoriel. On laisse au lecteur le soin de reformuler les lemmes (4.1) et (4.3) avec la notation Tor. Pour notre part, nous montrerons la généralisation suivante du lemme (4.2).

THÉORÈME 4.6. (a) *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un A-module M:*

(i) *M est plat.*
(ii) $\mathrm{Tor}_1^A(M,-)=0$.
(iii) $\mathrm{Tor}_n^A(M,-)=0$ *pour tout $n\geq 1$.*

(b) *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un A-module N:*

(i) *N est plat.*
(ii) $\mathrm{Tor}_1^A(-,N)=0$.
(iii) $\mathrm{Tor}_n^A(-,N)=0$ *pour tout $n\geq 1$.*

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. On a prouvé en (4.2) que (i) implique (iii). Comme il est clair que (iii) implique (ii), il reste à montrer que (ii) implique (i). Supposons donc le A-module M tel que $\mathrm{Tor}_1^A(M,-)=0$ et soit $0\longrightarrow N'\longrightarrow N\longrightarrow N''\longrightarrow 0$ une suite exacte de A-modules à gauche. Il suit du théorème (4.5) que l'on a une suite exacte de $\mathrm{Mod}\,K$

$$0=\mathrm{Tor}_1^A(M,N'')\longrightarrow M\otimes N'\longrightarrow M\otimes N\longrightarrow M\otimes N''\longrightarrow 0.$$

Donc $M\otimes_A -$ est exact: M est plat. □

Rappelons que si A est noethérienne, il y a identité entre modules plats de type fini et modules projectifs de type fini (VI.2.8): le théorème précédent caractérise alors les modules projectifs de type fini.

Enfin, Tor se comporte comme le produit tensoriel vis-à-vis des sommes directes.

THÉORÈME 4.7. (a) *Soient N un A^{op}-module, $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules et $n\geq 0$. On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Tor}_n^A\Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda,N\Big)\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Tor}_n^A(M_\lambda,N).$$

(b) *Soient M un A-module, $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules et $n\geq 0$. On a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Tor}_n^A\Big(M,\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}N_\lambda\Big)\xrightarrow{\sim}\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Tor}_n^A(M,N_\lambda).$$

DÉMONSTRATION. Semblable à celle du théorème (3.7) et laissée en exercice.□

On note que, si M (ou N) est un bimodule, alors il suit des définitions que $\mathrm{Tor}_n^A(M,N)$ acquiert une structure induite de module. Les isomorphismes précédents deviennent alors des isomorphismes pour cette structure. On a d'autre part la généralisation suivante de (V.1.3)(i) et (V), exercice 8, qui n'a pas d'analogue pour Ext, et permet d'échanger les deux variables de Tor.

PROPOSITION 4.8. *Soient M_A, ${}_AN$ deux A-modules et $n \geq 0$. On a un isomorphisme fonctoriel* $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_n^{A^{op}}(N,M)$. *En particulier, si A est une algèbre commutative, alors* $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_n^A(N,M)$.

DÉMONSTRATION. Soit

$$P_* \qquad\qquad \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de M. Par (V), exercice 8, on a des isomorphismes $f_n : P_n \otimes_A N \to N \otimes_{A^{op}} P_n$ définis pour chaque $n \geq 0$ par $y_n \otimes x \mapsto x \otimes y_n$ (où $x \in N$ et $y_n \in P_n$). La famille de morphismes $(f_n)_{n \geq 0}$ induit un isomorphisme de complexes $(P_M)_* \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes (P_M)_*$. Les modules d'homologie de ces complexes sont donc isomorphes. □

EXEMPLE 4.9. Soient A une K-algèbre et I un idéal à gauche de A. L'inclusion canonique $j : I \to A$ induit une suite exacte de $\mathrm{Mod}\, A^{\mathrm{op}}$

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{j} A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0.$$

Soit M un A-module arbitraire. Si on applique à la suite précédente le foncteur $M \otimes_A -$, on obtient une suite exacte

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(M,A) \to \mathrm{Tor}_1^A(M,A/I) \to M \otimes_A I \xrightarrow{M \otimes j} M \otimes_A A \to M \otimes_A A/I \to 0$$

où le premier terme s'annule car ${}_AA$ est projectif (donc plat). Compte tenu de l'isomorphisme fonctoriel $M \otimes_A A \xrightarrow{\sim} M$, il en résulte que $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/I)$ est isomorphe au noyau de l'application $M \otimes_A I \to M$ définie par $m \otimes x \mapsto mx$ (où $m \in M$ et $x \in I$). De même, si $n > 0$, on voit que

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^A(M, A/I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_n^A(M, I).$$

Il existe plusieurs identités fonctorielles reliant Ext et Tor. Nous en prouverons une, qui généralise (VI.2.7). Nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 4.10. *Soit I un A-module injectif. Pour tout complexe ascendant C^* de A-modules, et tout $n \geq 0$, on a des isomorphismes fonctoriels de K-modules*

$$H_n(\mathrm{Hom}_A(C^*, I)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(H^n(C^*), I).$$

DÉMONSTRATION. Soit en effet $C^* = (C^n, d^n)$

$$C^* \qquad\qquad \cdots \longrightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d^n} C^n \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+1} \longrightarrow \cdots.$$

On a, pour tout n, une suite exacte courte de A-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, d^n \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d^{n+1} \longrightarrow H^n(C^*) \longrightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur exact $\mathrm{Hom}_A(-, I)$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(H^n(C^*), I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\, d^{n+1}, I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Im}\, d^n, I) \longrightarrow 0.$$

L'exactitude de $\mathrm{Hom}_A(-,I)$ donne en outre

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\, d^{n+1}, I) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\,\mathrm{Hom}_A(d^{n+1}, I)\\ &= \mathrm{Hom}_A(C^n, I)/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d^{n+1}, I)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Im}\, d^{n}, I) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Coim}\,\mathrm{Hom}_A(d^{n}, I)\\ &= \mathrm{Hom}_A(C^n, I)/\,\mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(d^{n}, I).\end{aligned}$$

La suite exacte courte

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(H^n(C^*), I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(C^n, I)/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d^{n+1}, I) \longrightarrow\\ \mathrm{Hom}_A(C^n, I)/\,\mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(d^{n}, I) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

et le théorème d'isomorphisme donnent alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(H^n(C^*), I) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(d^n, I)/\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d^{n+1}, I)\\ &= H_n(\mathrm{Hom}_A(C^*, I)). \quad \square\end{aligned}$$

THÉORÈME 4.11. *Soient A une K-algèbre noethérienne, B une K-algèbre, L_A un A-module de type fini, ${}_BM_A$ un $(B-A)$-bimodule et ${}_BI$ un B^{op}-module injectif. Pour tout $n \geq 0$, on a des isomorphismes fonctoriels*

$$\mathrm{Tor}_n^A(L, \mathrm{Hom}_B(M, I)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Ext}_A^n(L, M), I).$$

DÉMONSTRATION. Comme A est noethérienne et L_A est un module de type fiui, il existe une résolution projective

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

avec chaque P_i un A-module projectif de type fini. Comme ${}_BI$ est injectif, il suit de (VI.2.7) que l'on a un isomorphisme fonctoriel

$$L \otimes_A \mathrm{Hom}_B(M, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(L, M), I).$$

Si on remplace L par chaque terme de $(P_L)_*$, on obtient un isomorphisme de complexes

$$(P_L)_* \otimes_A \mathrm{Hom}_B(M, I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A((P_L)_*, M), I).$$

Les modules d'homologie respectifs de ces deux complexes sont donc isomorphes. Le lemme (4.9) donne donc

$$\begin{aligned}H_n((P_L)_* \otimes_A \mathrm{Hom}_B(M, I)) &\xrightarrow{\sim} H_n(\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A((P_L)_*, M), I))\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(H^n(\mathrm{Hom}_A((P_L)_*, M), I).\end{aligned}$$

On a bien $\mathrm{Tor}_n^A(L, \mathrm{Hom}_B(M, I)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Ext}_A^n(L, M), I)$. $\square$

En particulier, si K est un corps et A une K-algèbre de dimension finie, on sait qu'on a une dnalité $D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ entre A-modules à droite et A-modnles à gauche de type fini. On en déduit l'énoncé suivant.

COROLLAIRE 4.12. *Soient K un corps, A une K-algèbre de dimension finie et L, M deux A-modules de type fini. Pour tout $n \geq 0$, on a des isomorphismes fonctoriels*

$$\operatorname{Tor}_n^A(L, DM) \xrightarrow{\sim} D\operatorname{Ext}_A^n(L, M).$$

En particulier, $L \otimes_A DM \xrightarrow{\sim} D\operatorname{Hom}_A(L, M)$.

DÉMONSTRATION. En effet, K est un K-module injectif. □

Notons que le deuxième énoncé du corollaire suit déjà de (VI.2.7), ainsi qu'on l'a observé en (VIII.4).

Pour achever cette section, remarquons que (4.6) semble suggérer que dans la définition des foncteurs de torsion, on peut remplacer les résolutions projectives par des résolutions plates (voir (V.2)). Nous prouvons que c'est le cas.

LEMME 4.13. *Soient M_A et ${}_AN$ deux A-modules et $n \geq 0$.*

(a) *Si P_* $\quad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$ est une résolution plate de M_A, alors on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\operatorname{Tor}_n^A(M, N) \xrightarrow{\sim} H_n\left((P_M)_* \otimes_A N\right).$$

(b) *Si P'_* $\quad \cdots \longrightarrow P'_2 \xrightarrow{d'_2} P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{d'_0} N \longrightarrow 0$ est une résolution plate de ${}_AN$, alors on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\operatorname{Tor}_n^A(M, N) \xrightarrow{\sim} H_n\left(M \otimes_A (P'_N)_*\right).$$

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. On utilise la récurrence et le décalage. L'énoncé est vrai pour $n = 0$, car $- \otimes_A N$ est exact à droite. Soit $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$ exacte courte, alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(M, N) \longrightarrow L \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes N} P_0 \otimes_A N \xrightarrow{d_0 \otimes N} M \otimes_A N \longrightarrow 0$$

d'où $\operatorname{Tor}_1^A(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(f \otimes N)$. Or $L = \operatorname{Ker} d_0$ donne une suite exacte $P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$, où $d_1 = fg$. On en déduit la ligne supérieure du diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & P_2 \otimes_A N \arrow[r, "d_2 \otimes N"] \arrow[d, "u"] & P_1 \otimes_A N \arrow[r, "g \otimes N"] \arrow[d, "1_{P_1 \otimes_A N}"] & L \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "f \otimes N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(d_1 \otimes N) \arrow[r] & P_1 \otimes_A N \arrow[r, "d_1 \otimes N"] & P_0 \otimes N &
\end{tikzcd}$$

où l'existence du morphisme u suit de ce que $(d_2 \otimes N)(d_1 \otimes N) = 0$. Comme il est clair que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im}(d_2 \otimes N)$, le lemme du serpent (II.3.6) donne que $\operatorname{Ker}(f \otimes N) \xrightarrow{\sim} \dfrac{\operatorname{Ker}(d_1 \otimes N)}{\operatorname{Im}(d_2 \otimes N)} \xrightarrow{\sim} H_1\left((P_M)_* \otimes_A N\right)$. Pour $n \geq 2$, on considère la résolution plate

$$\tilde{P}_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

de L, et on déduit de la récurrence

$$\mathrm{Tor}_n^A(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_{n-1}^A(L,N) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}\left(\left(\tilde{P}_L\right)_* \otimes_A N\right) \xrightarrow{\sim} H_n\left((P_M)_* \otimes_A N\right). \square$$

5. Suites exactes courtes et extensions.

L'expression "extension de N par M" avait déjà été employée en (III.4.8) pour désigner les suites exactes courtes de la forme

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Nous étudierons maintenant la relation entre ces suites exactes courtes et le premier module d'extension $\mathrm{Ext}_A^1(M,N)$. Nous commençons par définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des extensions de N par M. Deux telles extensions

$$\mathbf{e} \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

et

$$\mathbf{e}' \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} M \longrightarrow 0$$

sont dites *équivalentes* s'il existe un morphisme $h : E \to E'$ tel que $hf = f'$ et $g'h = g$. En d'autres termes, $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ sont équivalentes s'il existe un diagramme commutatif à lignes exactes de la forme

$$\begin{array}{lccccccccc} \mathbf{e} & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\ \mathbf{e}' & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

Il suit immédiatement du lemme des 5 (voir (II.3.5)) que, si c'est le cas, alors h est un isomorphisme et par conséquent $E \xrightarrow{\sim} E'$. Il est important toutefois de remarquer que cette dernière condition ne suffit pas pour définir une équivalence entre $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$: il faut non seulement qu'il existe un isomorphisme entre E et E', mais en outre qu'un tel isomorphisme rende le diagramme ci-dessus commutatif.

Il est facile de vérifier que la relation précédente définit bien une équivalence sur l'ensemble des extensions de N par M. La classe d'équivalence d'une extension $\mathbf{e}$ sera notée $[\mathbf{e}]$, et l'ensemble quotient $\mathcal{E}(M,N)$. L'objectif de cette section est de montrer que $\mathcal{E}(M,N)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}_A^1(M,N)$. On en déduira une forme explicite pour le premier morphisme de liaison dans les suites exactes de (3.5).

EXEMPLES 5.1. (a) Soient M,N deux A-modules. Deux extensions de N par M qui sont scindées en tant que suites exactes sont toujours éqnivalentes: en effet, il suit de la définition d'une suite exacte courte scindée que toute extension scindée de N par M est équivalente à

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]} M \oplus N \xrightarrow{[1\ 0]} M \longrightarrow 0.$$

(b) Soit $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de $\mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}$ (où p est un nombre premier). Alors l'ordre du groupe E est égal à p^2. Par le théorème fondamental de structure des groupes abéliens finis, on a donc deux termes médians possibles, à savoir $E \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ et $E \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_{p^2}$. Dans le premier cas, la suite exacte est scindée. Nous montrerons que, si $p \neq 2$, alors il existe au moins deux suites exactes non-équivalentes dont le terme médian est $\mathbb{Z}_{p^2}$. Soient en effet

$$\mathbf{e} \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

où $f : \overline{1} \mapsto \overline{p}$ et g est le conoyau de f, et

$$\mathbf{e}' \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f'} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{g'} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

où $f' : \overline{1} \mapsto \overline{2p}$ et g' est le conoyau de f'. Alors $\operatorname{Im} f' = \overline{p}\mathbb{Z}_{p^2} = \operatorname{Im} f$: en effet, il est clair que $\operatorname{Im} f$ est le sous-groupe de $\mathbb{Z}_{p^2}$ engendré par $\overline{p}$, et pour montrer que $\operatorname{Im} f'$ est aussi égal à ce sous-groupe, il suffit de montrer que $\overline{p} \in \overline{2p}\mathbb{Z}_{p^2}$, c'est-à-dire qu'il existe k tel que $\overline{p} = \overline{2kp}$, ou encore tel que p divise $2k-1$, et c'est évidemment le cas puisque p est un nombre premier distinct de 2. Par conséquent, $g = g'$. Si donc $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ étaient équivalentes, il existerait un morphisme $h : \mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_{p^2}$ tel que $f' = hf$ et $g'h = g$. La première relation donnerait $h(\overline{p}) = \overline{2p}$, et cela contredirait la seconde.

Nous montrons maintenant comment utiliser des morphismes pour construire, à partir d'extensions données, de nouvelles extensions.

Soit un diagramme à ligne exacte de $\operatorname{Mod} A$

$$\begin{tikzcd} & & & V \arrow[d, "v"'] & \\ \mathbf{e} \quad 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Il suit de (III.5.5) que ce diagramme peut être complété en un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} \mathbf{e}' \quad 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "1_L"] & U \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "u"] & V \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\ \mathbf{e} \quad 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où (U, u, g') est un produit fibré de v et g. En outre, l'extension $\mathbf{e}'$ est uniquement déterminée à équivalence près. On a montré qu'un morphisme $v : V \to N$ induit une application $\mathcal{E}(v, L) : \mathcal{E}(N, L) \to \mathcal{E}(V, L)$. L'image $[\mathbf{e}']$ de la classe $[\mathbf{e}]$ est notée $\mathcal{E}(v, L)[\mathbf{e}] = [\mathbf{e}v]$.

Dualement, soit un diagramme à ligne exacte de $\operatorname{Mod} A$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{e} \quad 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \\ & U & & & \end{tikzcd} .$$

Il suit de (III.5.9) que ce diagramme peut être complété en un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{llcccccccc} \mathbf{e} & 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & \big\downarrow{\scriptstyle u} & & \big\downarrow{\scriptstyle v} & & \big\downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \\ \mathbf{e}' & 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{f'} & V & \xrightarrow{g'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où (V, v, f') est une somme amalgamée de v et f'. En outre, l'extension $\mathbf{e}'$ est uniquement déterminée à équivalence près. On a montré qu'un morphisme $u : L \to U$ induit une application $\mathcal{E}(N, u) : \mathcal{E}(N, L) \to \mathcal{E}(N, U)$. L'image $[\mathbf{e}']$ de la classe $[\mathbf{e}]$ est notée $\mathcal{E}(N, u)[\mathbf{e}] = [u\mathbf{e}]$.

On laisse au lecteur la démonstration facile que $\mathcal{E}(-,-)$ est un bifoncteur (appliquant deux modules sur un ensemble) covariant dans sa seconde variable et contravariant dans sa première.

Afin de comparer l'ensemble $\mathcal{E}(M, N)$ au K-module $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$, on commence par construire une application du premier dans le second. Soit $\mathbf{e}$ une extension de N par M

$$\mathbf{e} \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0.$$

Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ appliqué à $\mathbf{e}$ donne une suite exacte de cohomologie

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, E) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(M,g)} \mathrm{Hom}_A(M, M) \xrightarrow{\delta_{\mathbf{e}}} \mathrm{Ext}^1_A(M, N) \longrightarrow \cdots$$

où on a noté $\delta_{\mathbf{e}}$ le morphisme de liaison. On affirme que l'élément $\delta_{\mathbf{e}}(1_M) \in \mathrm{Ext}^1_A(M, N)$, que l'on appelle la *classe caractéristique*, ou l'*obstruction* de $\mathbf{e}$, ne dépend que de la classe d'équivalence $[\mathbf{e}]$. Soit en effet

$$\mathbf{e}' \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} M' \longrightarrow 0$$

une extension équivalente. Il existe un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{llcccccccc} \mathbf{e} & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \big\downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\ \mathbf{e}' & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & M & \longrightarrow & 0 \ . \end{array}$$

La fonctorialité du morphisme de liaison donne un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M, M) & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{e}}} & \mathrm{Ext}^1_A(M, N) \\ \big\downarrow{\scriptstyle 1} & & \big\downarrow{\scriptstyle 1} \\ \mathrm{Hom}_A(M, M) & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{e}'}} & \mathrm{Ext}^1_A(M, N) \end{array}$$

et donc $\delta_{\mathbf{e}}(1_M) = \delta_{\mathbf{e}'}(1_M)$. On a ainsi défini une application $\varphi = \varphi_{M,N} : \mathcal{E}(M, N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M, N)$ par $\varphi[\mathbf{e}] = \delta_{\mathbf{e}}(1_M)$.

Nous montrons maintenant comment calculer explicitement la classe caractéristique $\varphi[\mathrm{e}]$ de e. Soit

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de M, alors il suit du théorème de comparaison (2.1) que l'on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{lccccccccccc}
P_* & \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
\mathrm{e} & & & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \ .
\end{array}$$

En particulier, $h_1 d_2 = 0$ de sorte que $h_1 \in \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_A(d_2, N)$. Comme

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^1_A(M,N) &= H^1(\operatorname{Hom}_A((P_M)_*, N)) \\
&= \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_A(d_2,N)/\operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(d_1,N)
\end{aligned}$$

il s'ensuit que h_1 détermine un élément $h_1 + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(d_1,N)$ de $\operatorname{Ext}^1_A(M,N)$. D'autre part, (2.1) nous dit aussi que h_1 est uniquement déterminé à homotopie près (et donc sa classe dans $H^1(\operatorname{Hom}_A((P_M)_*, N))$ est uniquement déterminée) et enfin h_1 ne change pas si on remplace e par une extension équivalente de sorte que $h_1 + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(d_1,N)$ ne dépend que de la classe $[\mathrm{e}]$.

Il est possible d'exprimer autrement le morphisme h_1. Notons $L = \operatorname{Im} d_1$ et $p : P_1 \to L$, $j : L \to P_0$ respectivement la projection et l'inclusion canoniques, alors la relation $h_1 d_2 = 0$ signifie qu'il existe $h : L \to N$ tel que $h_1 = hp$, de sorte que l'on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathrm{e}_0 & 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
\mathrm{e} & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \ .
\end{array}$$

En particulier, on a $[\mathrm{e}] = [h\mathrm{e}_0]$.

LEMME 5.2. *Avec les notations précédentes,* $\varphi[\mathrm{e}] = h_1 + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(d_1,N)$.

DÉMONSTRATION. Il s'agit de calculer l'image de 1_M par $\delta_{\mathrm{e}} : \operatorname{Hom}_A(M,M) \to \operatorname{Ext}^1_A(M,N)$. Pour cela, on observe que les suites exactes e_0 et e induisent un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(M,N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(M,E) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(M,M) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(P_0,N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(P_0,E) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(P_0,M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(L,N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(L,E) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(L,M) & &
\end{array}$$

où tous les morphismes sont les morphismes induits. Le morphisme $\delta_{\mathbf{e}}$ est obtenu par une application du lemme du serpent (II.3.6) aux deux lignes inférieures, donc la classe caractéristique $\delta_{\mathbf{e}}(1_M)$ est égale à

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_A(p,N)\,\mathrm{Hom}_A(L,f)^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(j,E)\,\mathrm{Hom}_A(P_0,g)^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(d_0,M)(1_M)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N)\\
&= \mathrm{Hom}_A(p,N)\,\mathrm{Hom}_A(L,f)^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(j,E)\,\mathrm{Hom}_A(P_0,g)^{-1}(d_0)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N)\,.
\end{aligned}$$

Le morphisme $h_0 : P_0 \to E$ satisfait $d_0 = gh_0 = \mathrm{Hom}_A(P_0,g)(h_0)$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{e}}(1_M) &= \mathrm{Hom}_A(p,N)\,\mathrm{Hom}_A(L,f)^{-1}\,\mathrm{Hom}_A(j,E)(h_0) + \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N)\\
&= \mathrm{Hom}_A(p,N)\,\mathrm{Hom}_A(L,f)^{-1}(h_0j) + \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N)\,.
\end{aligned}$$

Enfin, $h : L \to N$ satisfait $h_0j = fh = \mathrm{Hom}_A(L,f)(h)$ et l'on a

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{e}}(1_M) &= \mathrm{Hom}_A(p,N)(h) + \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N)\\
&= hp + \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N)\\
&= h_1 + \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N)\,. \quad \square
\end{aligned}$$

COROLLAIRE 5.3. *$\varphi[\mathbf{e}] = 0$ si et seulement si la suite exacte $\mathbf{e}$ est scindée. En particulier, si $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = 0$, alors toute extension de N par M est scindée.*

DÉMONSTRATION. En effet, $\varphi[\mathbf{e}] = 0$ si et seulement si $h_1 \in \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(d_1,N)$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $h' : P_0 \to N$ tel que $h_1 = h'd_1$, ou encore $h = h'j$. Par la propriété universelle de la somme amalgamée E de h et j, c'est le cas si et seulement si $\mathbf{e}$ est scindée. $\square$

On remarquera qu'il existe une preuve de (5.3) utilisant simplement la définition de φ: en effet, $\mathbf{e}$ est scindée si et seulement si g est une rétraction, ce qui est le cas si et seulement si $1_M \in \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(M,g)$. Comme $\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_A(M,g) = \mathrm{Ker}\,\delta_{\mathbf{e}}$, cela montre que $\mathbf{e}$ est scindée si et seulement si $\delta_{\mathbf{e}}(1_M) = 0$.

Nous arrivons au résultat principal de cette section.

THÉORÈME 5.4. *Soient M, N deux A-modules. L'application $\varphi = \varphi_{M,N} : \mathcal{E}(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ est une bijection fonctorielle en M et N, dans laquelle la classe de l'extension scindée correspond à $0 \in \mathrm{Ext}^1_A(M,N)$.*

DÉMONSTRATION. On construit l'application réciproque $\varphi' : \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \to \mathcal{E}(M,N)$. Soit

$$P_* \qquad\qquad \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de M. On note encore $L = \mathrm{Im}\,d_1$, et $p : P_1 \to L$ et $j : L \to P_0$ respectivement la projection et l'injection canoniques, de sorte que l'on a une suite exacte courte

$$\mathbf{e}_0 \qquad\qquad 0 \longrightarrow L \xrightarrow{j} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0\,.$$

Soit $x \in \operatorname{Ext}^1_A(M,N)$. Alors il existe $h_1 : P_1 \to N$ tel que $h_1 d_2 = 0$ et $x = h_1 + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(d_1, N)$. La condition $h_1 d_2 = 0$ revient à dire qu'il existe $h : L \to N$ tel que $h_1 = hp$. On pose alors $\varphi'(x) = [h\mathbf{e}_0]$.

$$\begin{array}{llcccccccccl}
\mathbf{e}_0 & \quad & 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 & \\
& & & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h_0} & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & & \\
h\mathbf{e}_0 & & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 & .
\end{array}$$

Il faut montrer que cette définition ne dépend pas du choix du représentant h_1 de la classe x. Soient $h_1, h_1' \in \operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_A(d_2, N)$ tels que $h_1' - h_1 \in \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(d_1, N)$, c'est-à-dire tels qu'il existe $s : P_0 \to N$ vérifiant $h_1' - h_1 = sd_1$. Posant $h_1 = hp$ et $h_1' = h'p$, on a $h' - h = sj$ (puisque p est un épimorphisme). On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{llcccccccccl}
\mathbf{e}_0 & \quad & 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 & \\
& & & & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle h_0+fs} & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & & \\
h'\mathbf{e}_0 & & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 & .
\end{array}$$

En effet, $fh' = f(h + sj) = h_0 j + fsj = (h_0 + fs)j$ et $g(h_0 + fs) = gh_0 = d_0$. Il suit de l'unicité dans (III.5.9) que $[h\mathbf{e}_0] = [h'\mathbf{e}_0]$. Cela achève de montrer que φ' est définie sans ambiguïté.

Nous prouvons maintenant que φ et φ' sont mutuellement inverses. Montrons d'abord que $\varphi\varphi' = 1$. Soit $x = h_1 + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(d_1, N) \in \operatorname{Ext}^1_A(M,N)$, alors $\varphi'(x) = [h\mathbf{e}_0]$, où h et $\mathbf{e}_0$ sont comme plus haut. Il suit de (5.2) que $\varphi[h\mathbf{e}_0] = hp + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(d_1, N) = x$. Maintenant, montrons qne $\varphi'\varphi = 1$. Soit $[\mathbf{e}] \in \mathcal{E}(M,N)$, on a $\varphi[\mathbf{e}] = hp + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(d_1,N)$, où $hp : P_1 \to N$ suit, comme on l'a vu, d'une application du théorème de comparaison. Alors $\varphi'\varphi[\mathbf{e}] = \varphi'(hp + \operatorname{Im}\operatorname{Hom}_A(d_1, N)) = [h\mathbf{e}_0]$, et on a $[h\mathbf{e}_0] = [\mathbf{e}]$, par l'unicité dans (III.5.9).

Enfin, la fonctorialité de φ suit de celle du morphisme de liaison, et le dernier énoncé suit de (5.3). □

On pourrait, dualement, partant d'une suite exacte

$$\mathbf{e} \qquad 0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

lui appliquer le foncteur contravariant $\operatorname{Hom}_A(-, N)$ et considérer l'image de 1_N par le morphisme de liaison $\delta_{\mathbf{e}} : \operatorname{Hom}_A(N,N) \to \operatorname{Ext}^1_A(M,N)$. Elle permet de définir une application $\mathcal{E}(M,N) \to \operatorname{Ext}^1_A(M,N)$ par $[\mathbf{e}] \mapsto \delta_{\mathbf{e}}(1_N)$. On montre comme plus haut, en utilisant une résolution injective de N, que c'est une bijection fonctorielle en M et N, dans laquelle la classe de la suite exacte scindée correspond à $0 \in \operatorname{Ext}^1_A(M,N)$.

Les bijections réciproques du théorème sont des bijections d'ensembles. Comme $\operatorname{Ext}^1_A(M,N)$ est un K-module, on peut transporter sa structnre sur $\mathcal{E}(M,N)$, faisant également de ce dernier un K-module. Nous n'expliciterons pas ici cette structure induite. Identifiant $\mathcal{E}(M,N)$ et $\operatorname{Ext}^1_A(M,N)$ an moyen des bijections précédentes, nous avons le très utile corollaire suivant.

COROLLAIRE 5.5. (a) *Soient M un A-module et* $\mathbf{e} : 0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ *une suite exacte courte, alors le morphisme de liaison* $\operatorname{Hom}_A(M, N'') \to \operatorname{Ext}^1_A(M, N')$ *est donné par* $v \mapsto [\mathbf{e}v]$.

(b) *Soient N un A-module et* $\mathbf{e} : 0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *une suite exacte courte, alors le morphisme de liaison* $\operatorname{Hom}_A(M', N) \to \operatorname{Ext}^1_A(M'', N)$ *est donné par* $u \mapsto [u\mathbf{e}]$.

DÉMONSTRATION. On se contentera de prouver (a), la démonstration de (b) étant semblable. Soit $v \in \operatorname{Hom}_A(M, N'')$, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{lccccccccc} \mathbf{e}v & 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1_{N'}} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle v} & & \\ \mathbf{e} & 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui iuduit, par application du foncteur $\operatorname{Hom}_A(M, -)$, un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_A(M, M) & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{e}v}} & \operatorname{Ext}^1_A(M, N') \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \operatorname{Hom}_A(M,v)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1} \\ \operatorname{Hom}_A(M, N'') & \xrightarrow{\delta_{\mathbf{e}}} & \operatorname{Ext}^1_A(M, N') \end{array}$$

à cause de la fonctorialité du morphisme de liaison. On a donc

$$\delta_{\mathbf{e}}(v) = \delta_{\mathbf{e}} \operatorname{Hom}_A(M, v)(1_M) = \delta_{\mathbf{e}v}(1_M) = \varphi[\mathbf{e}v].$$

Comme $\varphi[\mathbf{e}v]$ est identifié à $[\mathbf{e}v]$, on a fini. □

Il est possible de généraliser les résultats de cette section en donnant une interprétation des modules $\operatorname{Ext}^n_A(M, N)$ (avec $n \geq 1$) comme ensembles des classes d'équivalence des suites exactes de la forme $0 \longrightarrow N \longrightarrow E_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ ainsi que des morphismes de liaison correspondants. Nous ne le ferons pas ici, et terminons sur un exemple.

EXEMPLE 5.6. Soit p un nombre premier. Il suit de l'exemple à la fin de la section 3 que l'on a $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$. D'autre part, par l'exemple (5.1)(b) plus haut, les suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f_k} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{g_k} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

où f_k (avec $0 \leq k \leq p-1$) est défini par $\overline{1} \mapsto \overline{kp}$, forment un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphismes d'extensions de $\mathbb{Z}_p$ par lui-même.

Exercices du Chapitre IX.

1. On considère $\mathbb{Z}$ comme une catégorie dont les objets sont les éléments et pour chaque paire (n,k) où $n \in \mathbb{Z}$ et $k > 0$, il existe un morphisme unique $n \mapsto n+k$. Montrer que les complexes sur $\operatorname{Mod} A$ coïncident avec les foncteurs $\mathbb{Z} \to \operatorname{Mod} A$ et les morphismes de complexes avec les morphismes fonctoriels.

2. Montrer qu'un morphisme de complexes $f_* = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un monomorphisme (ou un épimorphisme) si et seulement si chaque f_n l'est.

3. Soient $C'_* = (C'_n, d'_n)$ et $C''_* = (C''_n, d''_n)$ deux complexes. Montrer que le complexe $C'_* \oplus C''_* = \left(C'_n \oplus C''_n, \begin{bmatrix} d'_n & 0 \\ 0 & d''_n \end{bmatrix}\right)$ est la somme directe de C'_* et C''_* dans la catégorie Comp_*. Montrer que, pour tout n, on a $H_n\,(C'_* \oplus C''_*) \xrightarrow{\sim} H_n(C'_*) \oplus H_n(C''_*)$.

4. Soit C_* un complexe avec $d_n = 0$ pour tout n. Montrer que $H_n(C_*) = C_n$ pour tout n.

5. Démontrer en détail les résultats sur la cohomologie énoncés à la fin de la section 1.

6. Soit $0 \longrightarrow C'_* \longrightarrow C_* \longrightarrow C''_* \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de la catégorie Comp_*. Montrer que si deux des trois complexes C'_*, C_*, C''_* sont exacts, il en est de même du troisième.

7. Soit $f_* : C_* \to C'_*$ un morphisme de complexes. Montrer que, si $\operatorname{Ker} f_*$ et $\operatorname{Coker} f_*$ sont des complexes exacts, alors $H_n(f_*)$ est un isomorphisme pour tout n.

8. On considère le complexe $\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{32} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}_{32} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}_{32} \longrightarrow \cdots$ de $\mathbb{Z}$-modules, avec $d(\overline{x}) = 8\overline{x}$ pour tout $\overline{x} \in \mathbb{Z}_{32}$. Calculer la suite exacte d'homologie.

9. Soient C_* et C'_* deux complexes, et f_*, $g_* : C_* \to C'_*$ deux morphismes homotopes. Montrer que, pour tout foncteur contravariant F, les morphismes $F(f_*)$ et $F(g_*)$ sont homotopes.

10. Un morphisme de complexes $f_* : C_* \to C'_*$ est un *homotopisme* s'il existe $f'_* : C'_* \to C_*$ tel que $f_* f'_* \sim 1_{C'_*}$ et $f'_* f_* \sim 1_{C_*}$.

   (a) Montrer que, si $f_* : C_* \to C'_*$ est un homotopisme et $f'_*, f''_* : C'_* \to C_*$ sont tels que $f'_* f_* \sim 1_{C_*}$ et $f_* f''_* \sim 1_{C'_*}$, alors $f'_* \sim f''_*$.
   (b) Montrer que, si f_* est un homotopisme, alors $H_n(f_*)$ est un isomorphisme pour tout n.
   (c) Montrer que la composition de deux homotopismes est un homotopisme.
   (d) Montrer que tout morphisme homotope à un homotopisme est un homotopisme.

11. Soient C_* un complexe et $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout foncteur exact covariant (ou contravariant) F, on a $H_n(FC_*) \xrightarrow{\sim} FH_n(C_*)$ (ou $H^n(FC_*) \xrightarrow{\sim} FH_n(C_*)$, respectivement).

12. (a) Soient $C_* = (C_n, d_n)$, $C'_* = (C'_n, d'_n)$ deux complexes et $f_* : C_* \to C'_*$ un morphisme. Pour chaque n, on pose $M_n = C_{n-1} \oplus C'_n$ et on définit $\delta_n : M_n \to M_{n-1}$ par $\delta_n(x_{n-1}, x'_n) = (-d_{n-1}(x_{n-1}), d'_n(x'_n) + f_{n-1}(x_{n-1}))$. Montrer que $M^f_* = (M_n, \delta_n)$ est un complexe (appelé le *cône* sur f).

(b) Soit C^+_* le complexe obtenu de C_* en augmentant les indices de 1: $C^+_n = C_{n-1}$, avec les différentielles évidentes. Montrer que $H_n(C^+_*) = H_{n-1}(C_*)$.

(c) Montrer qu'il existe une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow C'_* \xrightarrow{u_*} M^f_* \xrightarrow{v_*} C^+_* \longrightarrow 0$$

où $u_n : C'_n \to C_{n-1} \oplus C'_n$ est donné par $x'_n \mapsto (0, x'_n)$ et $v_n : C_{n-1} \oplus C'_n \to C_{n-1}$ est donné par $(x_{n-1}, x'_n) \mapsto x_{n-1}$.

(d) Montrer que la suite d'homologie de la suite exacte courte de (c) est

$$\cdots \to H_{n+1}(C'_*) \longrightarrow H_{n+1}(M^f_*) \longrightarrow H_n(C_*) \xrightarrow{\delta} H_n(C'_*) \longrightarrow H_n(M^f_*) \to \cdots$$

où le morphisme de liaison δ est égal à $H_n(f_*)$, le morphisme induit de f_*.

13. Soient C_* un complexe de A-modules, ${}_AM_B$ un bimodule et N_B un module. Montrer l'existence d'un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_B(C_* \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(C_*, \mathrm{Hom}_B(M, N)).$$

14. Prouver en détail (4.4).

15. Prouver en détail (4.7).

16. Montrer que, si K est un corps, M_A et N_A sont des modules de type fini sur une K-algèbre de dimension finie A, alors $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie.

17. Montrer que, si K est un corps, M_A et ${}_AN$ sont des modules de type fini sur une K-algèbre de dimension finie A, alors $\mathrm{Tor}^A_1(M, N)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie.

18. Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte. Montrer que:

(a) Un morphisme $f' : M' \to N$ se prolonge à nn morphisme $M \to N$ si et seulement si l'image de f' par le morphisme de liaison $\mathrm{Hom}_A(M', N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M'', N)$ est nulle.

(b) Un morphisme $f'' : N \to M''$ se relève en un morphisme $N \to M$ si et seulement si l'image de f'' par le morphisme de liaison $\mathrm{Hom}_A(N, M'') \to \mathrm{Ext}^1_A(N, M')$ est nulle.

19. Soient $0 \longrightarrow M' \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow L \longrightarrow I \longrightarrow L' \longrightarrow 0$ deux suites exactes courtes, avec P projectif et I injectif. Montrer que l'on a un isomorphisme de K-modules $\mathrm{Ext}^1_A(M', L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(M, L')$.

20. Soient deux suites exactes courtes de A-modules

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} P \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow I \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

avec P projectif et I injectif. Montrer que:

(a) $\operatorname{Ext}_A^1(X,Y) \xrightarrow{\sim} \dfrac{\operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_A(f,g)}{\operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_A(f,I)+\operatorname{Ker}\operatorname{Hom}_A(P,g)}$.

(b) $\operatorname{Ext}_A^2(X,Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker}\operatorname{Hom}_A(f,g)$.

(c) $\operatorname{Ext}_A^n(X,Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}_A^{n-2}(M,N)$ pour $n > 2$.

21. Soient deux suites exactes courtes de A-modules

$$0 \longrightarrow M_A \xrightarrow{f} P_A \longrightarrow X_A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow {}_AN \xrightarrow{g} {}_AQ \longrightarrow {}_AY \longrightarrow 0$$

avec P, Q projectifs. Montrer que

(a) $\operatorname{Tor}_1^A(X,Y) \xrightarrow{\sim} \dfrac{\operatorname{Im}(f\otimes Q)\cap\operatorname{Im}(P\otimes g)}{\operatorname{Im}(f\otimes g)}$.

(b) $\operatorname{Tor}_2^A(X,Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ker}(f\otimes g)$.

(c) $\operatorname{Tor}_n^A(X,Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Tor}_{n-2}^A(M,N)$ pour tout $n > 2$.

22. Soient m, n deux entiers de pgcd égal à d. Montrer que

$$\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_d.$$

23. Soit G un groupe abélien avec $mG = G$ pour un $m \in \mathbb{Z}$. Montrer que toute suite exacte courte $0 \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0$ est scindée.

24. Soit G un groupe abélien de torsion. Montrer que

$$\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

25. Soit G un groupe abélien. Pour $n > 0$, on note $G[n] = \{x \in G \mid nx = 0\}$. Montrer que $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, G) \xrightarrow{\sim} G[n]$.

26. En appliquant $-\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n$ à la suite exacte courte de $\operatorname{Mod}\mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

où $f : x \mapsto nx$, montrer que $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_n$.

27. Montrer que, si n et m sont copremiers, alors $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m) = 0$.

28. Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte avec M' et M'' plats. Montrer que M est plat.

29. Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte et scindée de A-modules. Montrer que pour tout A-module X et tout $n \geq 0$, les snites induites

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(X,M') \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(X,M) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(X,M'') \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(M'',X) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(M,X) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(M',X) \longrightarrow 0$$

sont exactes et scindées.

30. Répéter l'exercice précédent pour Tor au lieu de Ext.

31. Montrer qu'un A-module M est projectif (ou injectif) si et seulement si $\mathrm{Ext}^1_A(M,S) = 0$ (ou $\mathrm{Ext}^1_A(S,M) = 0$, respectivement) pour tout A-module simple S.

32. Soient A une algèbre noethérienne, M un A-module de présentation finie, $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille arbitraire de A-modules. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^n_A\left(M, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}^n_A(M, N_\lambda).$$

33. Soient A une K-algèbre, I un idéal à droite et J un idéal à gauche. Montrer que $\mathrm{Tor}^A_1(A/I, A/J) \xrightarrow{\sim} \dfrac{I\cap J}{IJ}$.

34. Donner une démonstration de (5.4) au moyen d'une résolution injective de N.

35. On considère le diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{lccccccccc} \mathbf{e}_1 & 0 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle h} & & \\ \mathbf{e}_2 & 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & 0\ . \end{array}$$

Montrer qu'il existe $g : M_1 \to M_2$ rendant le diagramme commutatif si et seulement si $[f\mathbf{e}_1] = [\mathbf{e}_2 h]$.

36. Soit p un nombre premier. Décrire explicitement les éléments de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^2}, \mathbb{Z}_{p^2}),\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^2}, \mathbb{Z}_{p^3}),\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^3}, \mathbb{Z}_{p^2}),\ \text{et}\ \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^3}, \mathbb{Z}_{p^3}).$$

CHAPITRE X

Dimensions homologiques de modules et d'algèbres.

Il est utile de mesurer à quel point un module est "éloigné" d'être projectif (ou injectif). Pour cela, on utilise essentiellement deux caractérisations des modules projectifs: un A-module M est projectif si et seulement si $\mathrm{Ext}_A^1(M,-) = 0$, ou encore si et seulement s'il existe une résolution projective $0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ de longueur nulle. Deux mesures du défaut de projectivité sont donc le plus petit indice n tel que $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,-) = 0$, ou encore la plus petite longueur d'une résolution projective de M. On montrera que ces deux entiers sont égaux et définissent ce qu'on appelle la dimension projective de M. On définit de même la dimension injective de M. Le suprémum des dimensions projectives des A-modules égale le suprémum des dimensions injectives et est ce qu'on appelle la dimension globale (à droite) de l'algèbre A. L'objet de ce chapitre est l'étude de ces dimensions.

1. Dimensions homologiques de modules.

DÉFINITION. Soient A une K-algèbre et M un A-module. On dit que la *dimension projective* de M est au plus n (ce qu'on note $\mathrm{dp}\, M \leq n$) s'il existe une résolution projective

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Si n est le plus petit entier tel qu'il existe une telle résolution, on dit que la dimension projective de M est égale à n (ce qu'on note $\mathrm{dp}\, M = n$). Si aucune telle résolution projective finie n'existe, on dit que la dimension projective de M est infinie, et on pose $\mathrm{dp}\, M = \infty$. On convient que $\mathrm{dp}\, 0 = -\infty$.

EXEMPLES 1.1. (a) Pour un A-module M, $\mathrm{dp}\, M = 0$ si et seulement si M est projectif et non nul.

(b) Soit $m > 0$ un entier arbitraire. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_m$ est de dimension projective 1: on sait en effet qu'il existe une suite exacte courte de $\mathrm{Mod}\,\mathbb{Z}$ de la forme

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0$$

où f est définie pour $a \in \mathbb{Z}$ par $a \mapsto ma$ et $g = \operatorname{coker} f$. Cette suite étant une résolution projective, on a $\operatorname{dp} \mathbb{Z}_m \leq 1$; d'autre part, $\mathbb{Z}_m$ n'est pas projectif (sinon la suite serait scindée, et $\mathbb{Z}_m$ serait isomorphe à un idéal de $\mathbb{Z}$, ce qui contredirait le fait que ceux-ci sont de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un $n \in \mathbb{Z}$) donc $\operatorname{dp} \mathbb{Z}_m = 1$.

(c) Soit $\left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$, avec K un corps. On a vu en (VIII.1) que les modules projectifs indécomposables sont $\mathrm{e}_{11}A$ (lequel est simple) et $\mathrm{e}_{22}A$, et qu'il existe un monomorphisme $\mathrm{e}_{11}A \to \mathrm{e}_{22}A$ de conoyau $\mathrm{e}_{22}A/\mathrm{e}_{22}J$ (où $J = \operatorname{rad} A$), lequel est simple. On a ainsi une suite exacte courte $0 \longrightarrow \mathrm{e}_{11}A \longrightarrow \mathrm{e}_{22}A \longrightarrow \mathrm{e}_{22}A/\mathrm{e}_{22}J \longrightarrow 0$ de sorte que $\operatorname{dp}(\mathrm{e}_{22}A/\mathrm{e}_{22}J) = 1$.

THÉORÈME 1.2. *Soient A une K-algèbre, M un A-module et $n \geq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\operatorname{dp} M \leq n$.
(b) $\operatorname{Ext}_A^k(M, -) = 0$ *pour tout* $k > n$.
(c) $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(M, -) = 0$.
(d) *Pour toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec les P_i projectifs, L_{n-1} est projectif.

DÉMONSTRATION. (a) implique (b). Par définition, dire que $\operatorname{dp} M \leq n$ revient à dire qu'il existe une résolution projective

$$P_* \qquad\qquad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de M avec $P_k = 0$ pour tout $k > n$. Donc $\operatorname{Hom}_A(P_k, N) = 0$ pour tout $k > n$ et tout A-module N, et par conséquent $\operatorname{Ext}_A^k(M, N) = H^k(\operatorname{Hom}_A((P_M)_*, N)) = 0$ pour tout $k > n$.

(b) implique (c). C'est évident.

(c) implique (d). Soit une suite exacte

$$0 \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec les P_i projectifs, et soit N un A-module. Par décalage,

$$\operatorname{Ext}_A^{n+1}(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}_A^1(L_{n-1}, N).$$

L'hypothèse (c) donne donc $\operatorname{Ext}_A^1(L_{n-1}, -) = 0$ et L_{n-1} est projectif (par (IX.3.6)).

(d) implique (a). Considérons une résolution projective de M à $n-1$ termes

$$P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Il suit de l'hypothèse que $L_{n-1} = \operatorname{Ker} d_{n-1}$ est projectif. Donc

$$0 \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

est une résolution projective de M de longueur n. □

Il est utile de reformuler le théorème précédent sous la forme suivante:

$$\operatorname{dp} M = \sup\{n \mid \operatorname{Ext}_A^n(M, -) \neq 0\}.$$

COROLLAIRE 1.3. *Soit $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules, alors*

$$\operatorname{dp}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) = \sup\{\operatorname{dp} M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte de l'équivalence de (a) et (c) dans le théorème précédent et de ce que $\operatorname{Ext}_A^n\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, -\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Ext}_A^n(M_\lambda, -)$ par (IX.3.7). □

COROLLAIRE 1.4. *Soit* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de A-modules. On a les inégalités suivantes*

(a) $\operatorname{dp} N \leq \sup\{\operatorname{dp} M, \operatorname{dp} L + 1\}$ *et l'égalité a lieu si* $\operatorname{dp} M \neq \operatorname{dp} L$.
(b) $\operatorname{dp} L \leq \sup\{\operatorname{dp} M, \operatorname{dp} N - 1\}$ *et l'égalité a lieu si* $\operatorname{dp} M \neq \operatorname{dp} N$.
(c) $\operatorname{dp} M \leq \sup\{\operatorname{dp} L, \operatorname{dp} N\}$ *et l'égalité a lieu si* $\operatorname{dp} N \neq \operatorname{dp} L + 1$.

DÉMONSTRATION. Nous nous contenterons d'établir (a), les preuves de (b) et (c) étant analogues. Soient X un A-module arbitraire et $n \geq 0$. On a une suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{n+1}(L, X) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{n+2}(N, X) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{n+2}(M, X) \longrightarrow \cdots$$

par (IX.3.5). Par conséquent, $\operatorname{dp} L \leq n$ et $\operatorname{dp} M \leq n+1$ entraînent $\operatorname{Ext}_A^{n+2}(N, -) = 0$, c'est-à-dire $\operatorname{dp} N \leq n+1$, ce qui est bien l'inégalité cherchée.

Si l'inégalité est stricte, c'est-à-dire si $\operatorname{dp} N \lneqq \sup\{\operatorname{dp} M, \operatorname{dp} L + 1\}$, alors, nécessairement, $\operatorname{dp} N < \infty$. Pour tout $k > \operatorname{dp} N$ et tout A-module X, la suite exacte ci-dessus donne que $\operatorname{Ext}_A^{k+1}(L, X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}_A^{k+1}(M, X)$. Par conséquent, $\operatorname{Ext}_A^{k+1}(L, -) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}_A^{k+1}(M, -)$ et donc $\operatorname{dp} M = \operatorname{dp} L$. □

EXEMPLE 1.5. Soient M un module de dimension projective finie $n > 1$ et

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une résolution projective de M. Si L_0 est le noyau de l'épimorphisme $P_0 \to M$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow L_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

et en outre $\operatorname{dp} L_0 = n - 1$. On a ici $\operatorname{dp} M = n$, $\operatorname{dp} P_0 = 0$ et $\operatorname{dp} L_0 = n - 1$, L'inégalité (c) est ici stricte, tandis que (a) et (b) ne le sont pas.

On a bien entendu les notions et résultats correspondants pour les modules injectifs.

DÉFINITION. Soient A une K-algèbre et M un A-module. On dit que la *dimension injective* de N est au plus n (ce qu'on note $\operatorname{di} N \leq n$) s'il existe une résolution injective

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^n \longrightarrow 0.$$

Si n est le plus petit entier tel qu'il existe une telle résolution, on dit que la dimension injective de N est égale à n (ce qu'on note $\operatorname{di} N = n$). Si aucune telle résolution injective finie n'existe, on dit que la dimension injective de N est infinie, et on pose $\operatorname{di} N = \infty$. On convient que $\operatorname{di} 0 = -\infty$.

EXEMPLES 1.6. (a) Pour un A-module N, $\operatorname{di} N = 0$ si et seulement si N est injectif.

(b) Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ est de dimension injective 1: en effet, on sait qu'un $\mathbb{Z}$-module est injectif si et seulement s'il est divisible et donc le module (non divisible) $\mathbb{Z}$ u'est pas injectif; par contre, l'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ induit une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

avec $\mathbb{Q}$ et (donc) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ divisibles: cette suite est donc une résolution injective.

(c) Soit $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$, avec K un corps. On a vu en (VIII.4) que les modules injectifs indécomposables sont $\mathbf{e}_{22}A \xrightarrow{\sim} D(A\mathbf{e}_{11})$ et $\mathbf{e}_{22}A/\mathbf{e}_{11}J \xrightarrow{\sim} D(A\mathbf{e}_{22})$ (ici, $D = \operatorname{Hom}_K(-,K) : \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}} \to \operatorname{mod} A$ désigne comme en (VIII.4) la dualité standard). La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbf{e}_{11}A \longrightarrow \mathbf{e}_{22}A \longrightarrow \mathbf{e}_{22}A/\mathbf{e}_{11}J \longrightarrow 0$$

donne que $\operatorname{di}(\mathbf{e}_{11}A) = 1$.

THÉORÈME 1.7. *Soient A une K-algèbre, N un A-module et $n \geq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\operatorname{di} N \leq n$.
(b) $\operatorname{Ext}_A^k(-,N) = 0$ *pour tout* $k > n$.
(c) $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(-,N) = 0$.
(d) *Pour toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{n-1} \longrightarrow L^{n-1} \longrightarrow 0$$

avec les I^i injectifs, L^{n-1} est injectif.

DÉMONSTRATION. Semblable à celle de (1.2) et laissée en exercice. □

Il est utile de reformuler le théorème précédent sous la forme suivante:

$$\operatorname{di} N = \sup\{n \mid \operatorname{Ext}_A^n(-,N) \neq 0\}.$$

COROLLAIRE 1.8. *Soit $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de A-modules, alors*

$$\operatorname{di}\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right) = \sup\{\operatorname{di} N_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

DÉMONSTRATION. Semblable à celle de (1.3) et laissée en exercice. □

COROLLAIRE 1.9. *Soit $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de A-modules. On a les inégalités suivantes:*

(a) $\operatorname{di} N \leq \sup\{\operatorname{di} M, \operatorname{di} L - 1\}$, *et l'égalité a lieu si* $\operatorname{di} M \neq \operatorname{di} L$.
(b) $\operatorname{di} L \leq \sup\{\operatorname{di} M, \operatorname{di} N + 1\}$, *et l'égalité a lieu si* $\operatorname{di} M \neq \operatorname{di} N$.
(c) $\operatorname{di} M \leq \sup\{\operatorname{di} L, \operatorname{di} N\}$, *et l'égalité a lieu si* $\operatorname{di} L \neq \operatorname{di} N + 1$.

DÉMONSTRATION. Semblable à celle de (1.4) et laissée eu exercice. □

EXEMPLE 1.10. Soient N un module de dimension injective finie $n > 1$ et

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^n \longrightarrow 0$$

une résolution injective de N. Si L^0 est le conoyau du monomorphisme $N \to I^0$, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I^0 \longrightarrow L^0 \longrightarrow 0$$

et en outre $\operatorname{di} L^0 = n - 1$. On a ici $\operatorname{di} N = n$, $\operatorname{di} I^0 = 0$ et $\operatorname{di} L^0 = n - 1$. L'inégalité (c) est ici stricte, tandis que (a) et (b) ne le sont pas.

Pour calculer la dimension injective d'un module, nous montrerons qu'il suffit de mesurer la longueur de certaines résolutions injectives, que nous appellerons minimales.

On dit qu'une résolution injective

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^2} I^2 \longrightarrow \cdots$$

du A-module N est une *résolution injective minimale* si, pour chaque $i \geq 0$, le module I^i est une enveloppe injective de $\operatorname{Im} d^i$. On se souvient que tout A-module admet une enveloppe injective et que celle-ci est unique à isomorphisme près (IV.4.5). Le résultat suivant n'est donc pas étonnant.

LEMME 1.11. *Tout A-module N admet une résolution injective minimale. Si*

$$I^* \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \longrightarrow \cdots$$

et

$$I'^* \qquad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{d'^0} I'^0 \xrightarrow{d'^1} I'^1 \longrightarrow \cdots$$

sont deux résolutions injectives, avec I^* minimale, alors il existe un morphisme $f^* : (I_N)^* \to (I'_N)^*$ qui prolonge 1_N, avec chaque f^i une section. Si en outre I'^* est aussi minimale, alors I^* et I'^* sont isomorphes.

DÉMONSTRATION. Pour montrer l'existence, on construit une résolution injective minimale par récurrence sur le degré. On prend pour I^0 une enveloppe injective de N (c'est-à-dire une extension essentielle maximale de N), et pour $d^0 : N \to I^0$ l'inclusion. Supposons I^i, d^i connus pour $i \leq j$, on a alors une suite exacte

$$I^{j-1} \xrightarrow{\ d^j\ } I^j \xrightarrow{\ p^j\ } L^j \longrightarrow 0$$

avec $L^j = \operatorname{Coker} d^j$, $p^j = \operatorname{coker} d^j$. On prend pour I^{j+1} une enveloppe injective de L^j et $q^j : L^j \to I^{j+1}$ égale à l'inclusion. Enfin, on pose $d^{j+1} = q^j p^j$. Alors il est clair qne la résolntion injective

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\ d^0\ } I^0 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\ d^j\ } I^j \xrightarrow{\ d^{j+1}\ } I^{j+1}$$

est minimale.

Supposons maintenant I^* et I'^* comme dans l'énoncé. On construit f^* par récurrence sur le degré. Pour chaque $i \geq 0$, posons $L^i = \operatorname{Coker} d^i$, $p^i = \operatorname{coker} d^i$, $q^i = \ker d^{i+1}$, $L'^i = \operatorname{Coker} d'^i$, $p'^i = \operatorname{coker} d'^i$ et $q'^i = \ker d'^{i+1}$. Comme I^0 et I'^0

sont injectifs, il existe $f^0 : I^0 \to I'^0$ tel que $f^0 d^0 = d'^0 1_N$ et $f'^0 : I'^0 \to I^0$ tel que $f'^0 d'^0 = d^0 1_N$. On affirme que $f'^0 f^0 : I^0 \to I^0$ est un isomorphisme. Comme $f'^0 f^0 d^0 = f'^0 d'^0 = d^0$ est un monomorphisme, et que d^0 est un monomorphisme essentiel, $f'^0 f^0$ est un monomorphisme. D'autre part, I^0 est une extension essentielle maximale de $d^0(N)$ et on a $d^0(N) \subseteq f'^0 f^0(N) \subseteq I^0$ de sorte que, par (IV.4.4)(c), $f'^0 f^0(I^0) = I^0$, c'est-à-dire que $f'^0 f^0$ est surjective. On a montré que $f'^0 f^0$ est un isomorphisme. En particulier, f^0 est une section.

Par passage aux conoyaux, il existe $g^0 : L^0 \to L'^0$ tel que $g^0 p^0 = p'^0 f^0$ et $g'^0 : L'^0 \to L^0$ tel que $g'^0 p'^0 = p^0 f'^0$ de sorte que l'on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{d^0} & I^0 & \xrightarrow{p^0} & L^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle 1_N}\downarrow & & {\scriptstyle f^0}\downarrow & & {\scriptstyle g^0}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{d'^0} & I'^0 & \xrightarrow{p'^0} & L'^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle 1_N}\downarrow & & {\scriptstyle f'^0}\downarrow & & {\scriptstyle g'^0}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{d^0} & I^0 & \xrightarrow{p^0} & L^0 & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

Comme 1_N et $f'^0 f^0$ sont des isomorphismes, il en est de même de $g'^0 g^0$.

Par récurrence, pour $i \geq 0$, étant donnés $g^i : L^i \to L'^i$ et $g'^i : L'^i \to L^i$ tels que $g'^i g^i : L^i \to L^i$ est un isomorphisme, l'injectivité de I^i et I'^i entraîne l'existence de $f^{i+1} : I^{i+1} \to I'^{i+1}$ tel que $f^{i+1} q^i = q'^i g^i$ et $f'^{i+1} : I'^{i+1} \to I^{i+1}$ tel que $f'^{i+1} q'^i = q^i g'^i$. On prouve exactement comme plus haut que $f'^{i+1} f^{i+1} : I^{i+1} \to I^{i+1}$ est un isomorphisme (en particulier, f^{i+1} est une section) et qu'il existe $g^{i+1} : L^{i+1} \to L'^{i+1}$ et $g'^{i+1} : L'^{i+1} \to L^{i+1}$ rendant commutatif le diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L^i & \xrightarrow{q^i} & I^{i+1} & \xrightarrow{p^{i+1}} & L^{i+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle g^i}\downarrow & & {\scriptstyle f^{i+1}}\downarrow & & {\scriptstyle g^{i+1}}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L'^i & \xrightarrow{q'^i} & I'^{i+1} & \xrightarrow{p'^{i+1}} & L'^{i+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle g'^i}\downarrow & & {\scriptstyle f'^{i+1}}\downarrow & & {\scriptstyle g'^{i+1}}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & L^i & \xrightarrow{q^i} & I^{i+1} & \xrightarrow{p^{i+1}} & L^{i+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et donc tels que $g'^{i+1} g^{i+1}$ est un isomorphisme. □

On déduit de ce lemme que deux résolutions injectives minimales sont nécessairement de même longueur, et qu'une résolution injective minimale est plus courte qu'une qui ne l'est pas. Appliquant ces remarques à la définition de la dimension injective, on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME 1.12. *Soient N un A-module, $n \geq 0$ et*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

une résolution injective minimale de N. Alors $\operatorname{di} N = n$ *si et seulement si* $I^n \neq 0$ *et* $I^i = 0$ *pour tout* $i > n$.

DÉMONSTRATION. Il est clair que $I^i = 0$ entraîne $I^j = 0$ pour tout $j \geq i$ (par définition d'une résolution injective minimale). On supposera d'abord $\operatorname{di} N = n$ et on montrera que $I^{n+1} = 0$, tandis que $I^n \neq 0$. En effet, dire que $\operatorname{di} N = n$ revient à dire qu'il existe une résolution injective de N de longueur n

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I'^0 \longrightarrow I'^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I'^n \longrightarrow 0$$

et que toute autre résolution injective de N est de longueur $\geq n$. C'est en particulier le cas de la résolution injective minimale donnée, donc $I^n \neq 0$. D'autre part, (1.9) nous dit que I^{n+1} est un facteur direct de $I'^{n+1} = 0$, donc $I^{n+1} = 0$. Cela montre la nécessité. La suffisance se montre de même: si, en effet $\operatorname{di} N = m < n$, le même raisonnement donne $I^{m+1} = 0$ et donc $I^n = 0$, une contradiction. □

Le résultat dual (sur les projectifs) n'est évidemment pas toujours vrai, puisqu'un A-module n'admet généralement pas de couverture projective. On sait néanmoins que c'est le cas pour les modules de type fini sur une algèbre artinienne (VIII.2.2). On dit qu'une résolution projective

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

d'un A-module M est une *résolution projective minimale* si, pour chaque $i \geq 0$, P_i est une couverture projective de $\operatorname{Ker} d_i$. On a les résultats duals.

LEMME 1.13. *Soient A une algèbre artinienne et M un A-module de type fini. Alors M admet une résolution projective minimale. Si*

$$P_* \qquad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$P'_* \qquad \cdots \longrightarrow P'_2 \longrightarrow P'_1 \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

sont deux résolutions projectives, avec P_* minimale, alors il existe un morphisme de complexes $f_* : (P'_M)_* \to (P_M)_*$ qui relève 1_M, avec chaque f_i une rétraction. Si en outre P'_* est aussi minimale, alors P_* et P'_* sont isomorphes.

DÉMONSTRATION. Semblable à celle de (1.9) et laissée en exercice. □

THÉORÈME 1.14. *Soient A une algèbre artinienne, M_A un module de type fini, $n \geq 0$ et*

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une résolution projective minimale de M. Alors $\operatorname{dp} M = n$ *si et seulement si* $P_n \neq 0$ *et* $P_i = 0$ *pour tout* $i > n$.

DÉMONSTRATION. Semblable à celle de (1.10) et laissée en exercice. □

2. Dimensions homologiques d'une algèbre.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. S'il existe un entier n et deux A-modules M, N tels que $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) \neq 0$, le plus grand tel entier n est appelé la *dimension globale à droite* de A, et on note $\mathrm{dim.gl.d.}\, A = n$. S'il n'existe pas un tel entier, on dit que A est de dimension globale à droite infinie, ce qu'on note $\mathrm{dim.gl.d.}\, A = \infty$. On convient que $\mathrm{dim.gl.d.}\, 0 = -\infty$.

On définit de même la *dimension globale à gauche* $\mathrm{dim.gl.s.}\, A$ au moyen de A-modules à gauche. Il n'y a évidemment aucune raison à priori pour que les dimensions globales à gauche et à droite d'une algèbre soient égales, et ce n'est généralement pas le cas. C'est vrai si l'algèbre est commutative, et nous verrons que ce l'est aussi si elle est noethérienne à droite et à gauche (par exemple, si elle est de dimension finie sur un corps). Si $\mathrm{dim.gl.d.}\, A = \mathrm{dim.gl.s.}\, A$, leur valeur commune est appelée la *dimension globale* de A et est notée $\mathrm{dim.gl.}\, A$.

THÉORÈME 2.1. *Soient A une K-algèbre et $n \geq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\mathrm{dim.gl.d.}\, A \leq n$,
(b) *pour tout A-module M, on a* $\mathrm{dp}\, M_A \leq n$,
(c) *pour tout A-module N, on a* $\mathrm{di}\, N_A \leq n$.

DÉMONSTRATION. On montrera l'équivalence de (a) et (b), l'équivalence de (a) et (c) se démontrant de même. Dire que, pour tout A-module M, on a $\mathrm{dp}\, M \leq n$ revient par (1.2) à dire que, pour tout A-module M, on a $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, -) = 0$, c'est-à-dire que, pour tous A-modules M, N, on a $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$. Par définition, cela revient à dire que $\mathrm{dim.gl.d.}\, A \leq n$. $\square$

COROLLAIRE 2.2.

$$\begin{aligned} \mathrm{dim.gl.d.}\, A &= \sup\{\mathrm{dp}\, M_A \mid M \text{ un } A\text{-module}\} \\ &= \sup\{\mathrm{di}\, N_A \mid N \text{ un } A\text{-module}\}. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLES 2.3. (a) Il suit de la définition qu'une K-algèbre A est de dimension globale à droite nulle si et seulement si $\mathrm{Ext}_A^1(M, N) = 0$ pour toute paire de modules M, N. Comme cette condition revient, par (IX.5.2), à dire que toute suite exacte courte de A-modules est scindée, il suit de (VI.7.1) que $\mathrm{dim.gl.d.}\, A = 0$ si et seulement si A est semisimple. Par conséquent, c'est le cas si et seulement si $\mathrm{dim.gl.s.}\, A = 0$.

(b) Il suit du corollaire que, pour une algèbre A, on a $\mathrm{dim.gl.d.}\, A = \infty$ si et seulement s'il existe un A-module M_A tel que $\mathrm{dp}\, M_A = \infty$. Soit p un nombre premier. La $\mathbb{Z}$-algèbre commutative $A = \mathbb{Z}_{p^2}$ est de dimension globale infinie, puisque le $\mathbb{Z}_{p^2}$-module $\mathbb{Z}_p$ admet une résolution projective de la forme

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

Nous allons montrer que pour calculer la dimension globale d'une algèbre, il suffit de calculer les dimensions projectives de ses modules cycliques. On rappelle que, par (II.4.2), un A-module est cyclique si et seulement s'il est de la forme A/I, pour I un idéal à droite de A.

LEMME 2.4. *Un A-module N est injectif si et seulement si* $\mathrm{Ext}^1_A(A/I, N) = 0$ *pour tout idéal à droite I de A.*

DÉMONSTRATION. La nécessité étant évidente par (IX.3.6), montrons la suffisance. On considère la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{u} A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

où u désigne l'inclusion canonique. Le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ appliqué à cette suite donne une suite exacte

$$\mathrm{Hom}_A(A, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(u,N)} \mathrm{Hom}_A(I, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(A/I, N) = 0.$$

Donc $\mathrm{Hom}_A(u, N)$ est surjectif: pour toute application linéaire $f : I \to N$, il existe une application linéaire $g : A \to N$ telle que $f = \mathrm{Hom}_A(u, N)(g) = gu$. Il suit du critère de Baer (IV.3.4) que N est injectif. $\square$

THÉORÈME 2.5 (AUSLANDER). *Pour toute K-algèbre A*

$$\mathrm{dim.\,gl.\,d.}\, A = \sup\{\mathrm{dp}\, A/I \mid I_A \textit{ idéal à droite de } A\}.$$

DÉMONSTRATION. L'énoncé est évident si le terme de droite est égal à $+\infty$. Supposons donc qu'il existe $n \geq 0$ tel que $\mathrm{dp}\, A/I \leq n$ pour tout idéal à droite I de A. Nous voulons montrer que $\mathrm{di}\, N \leq n$ pour tout A-module N. Soit une suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^{n-1} \longrightarrow L^{n-1} \longrightarrow 0$$

avec les I^i injectifs. Par décalage, $\mathrm{Ext}^{n+1}_A(A/I, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_A(A/I, L^{n-1})$. Comme $\mathrm{dp}\, A/I \leq n$, on a $\mathrm{Ext}^1_A(A/I, L^{n-1}) = 0$. Alors (2.4) donne L^{n-1} injectif et donc (1.6) que $\mathrm{di}\, N \leq n$. $\square$

EXEMPLE 2.6. $\mathrm{dim.\,gl.\,d.}\, \mathbb{Z} = (\mathrm{dim.\,gl.\,s.}\, \mathbb{Z} =)1$. En effet, tout idéal $I \neq 0$ de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un $n > 0$, et on a vu à l'exemple (1.1)(b) que la dimension projective de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_n$ est égale à 1.

Une conséquence intéressante de (2.5) est que la dimension globale d'une algèbre ne dépend que de ses modules de type fini.

COROLLAIRE 2.7. *Pour toute K-algèbre A, on a*

$$\mathrm{dim.\,gl.\,d.}\, A = \sup\{\mathrm{dp}\, M_A \mid M \textit{ de type fini}\}.$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que si $\mathrm{dim.\,gl.\,d.}\, A \leq n$, alors pour tout A-module M de type fini, on a $\mathrm{dp}\, M \leq n$. Réciproquement, supposons que $\mathrm{dp}\, M \leq n$ pour tout A-module M de type fini. Pour tout idéal à droite I de A, on a que A/I est cyclique, donc de type fini. Par conséquent, $\mathrm{dp}(A/I) \leq n$. Par (2.5), on a $\mathrm{dim.\,gl.\,d.}\, A \leq n$. $\square$

Une simplification supplémentaire a lieu si A est une K-algèbre artinienne (par exemple est de dimension finie sur un corps). Le théorème suivant prend tout son intérêt si on se souvient qu'une algèbre artinienne n'admet qu'un nombre fini de modules simples non-isomorphes (VII.4.5).

THÉORÈME 2.8. *Si A est une K-algèbre artinienne, on a*

$$\dim.\mathrm{gl.d.}\, A = \sup\{\mathrm{dp}\, S_A \mid S \text{ un } A\text{-module simple}\}.$$

DÉMONSTRATION. Comme tout A-module simple est cyclique, il suffit de considérer le cas où le terme de droite est égal à $n < \infty$. Nous montrerons que tout A-module M de type fini satisfait $\mathrm{dp}\, M \leq n$. Comme un tel module M est de longueur de composition ℓ finie, on prouve cet énoncé par récurrence sur ℓ. Si $\ell = 1$, alors M est simple et $\mathrm{dp}\, M \leq n$ par hypothèse. Si $\ell > 1$ et $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{\ell-1} \subset M_\ell = M$ est une suite de composition pour M, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M_{\ell-1} \longrightarrow M \longrightarrow M/M_{\ell-1} \longrightarrow 0$$

avec $M/M_{\ell-1}$ simple. On a $\mathrm{dp}(M/M_{\ell-1}) \leq n$ par hypothèse et $\mathrm{dp}\, M_{\ell-1} \leq n$ par l'hypothèse de récurrence. Il suit alors de (1.4) que $\mathrm{dp}\, M \leq n$. $\square$

Par exemple, soient K un corps et $\left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$. Cette algèbre admet deux modules simples non-isomorphes, à savoir $\mathrm{e}_{11}A$ (lequel est projectif) et $\mathrm{e}_{22}A/\mathrm{e}_{22}J$. On a vu à l'exemple (1.1)(c) que $\mathrm{dp}\left(\mathrm{e}_{22}A/\mathrm{e}_{22}J\right) = 1$. Comme $\mathrm{dp}(\mathrm{e}_{11}A) = 0$, on a $\dim.\mathrm{gl.d.}\, A = 1$.

Nous voulons maintenant montrer que si A est une algèbre noethérienne à gauche et à droite, alors $\dim.\mathrm{gl.d.}\, A = \dim.\mathrm{gl.s.}\, A$. Le moyen de traiter simultanément modules à droite et modules à gauche est de passer par le biais des produits tensoriels, donc des foncteurs de torsion. Nous aurons besoin de la notion suivante.

DÉFINITION. Soient A une K-algèbre et M un A-module. On dit que la *dimension plate* (ou *faible*) de M est au plus n (ce qu'on note $\mathrm{df}\, M \leq n$) s'il existe une résolution plate

$$0 \longrightarrow Q_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Si n est le plus petit entier tel qu'il existe une telle résolution, on dit que la dimension plate (ou faible) de M est égale à n (ce qu'on note $\mathrm{df}\, M = n$). Si aucune telle résolution plate n'existe, on dit que la dimension plate de M est infinie et on pose $\mathrm{df}\, M = \infty$. On convient que $\mathrm{df}\, 0 = -\infty$.

Comme tout module projectif est plat, on a toujours $\mathrm{df}\, M \leq \mathrm{dp}\, M$.

On a un énoncé correspondant aux théorèmes (1.2) et (1.6).

THÉORÈME 2.9. *Soient A une K-algèbre, M un A-module et $n \geq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) $\mathrm{df}\, M \leq n$.
(b) $\mathrm{Tor}_k^A(M, -) = 0$ *pour tout* $k > n$.
(c) $\mathrm{Tor}_{k+1}^A(M, -) = 0$.
(d) *Pour toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec les Q_i plats, L_{n-1} est plat.

DÉMONSTRATION. Semblable à celle des théorèmes (1.2) et (1.6) et laissée en exercice. □

Le théorème précédent peut être reformulé en disant que

$$\mathrm{df}\, M = \sup\{n \mid \mathrm{Tor}_n^A(M, -) \neq 0\}.$$

Cela nous conduit à définir la notion suivante.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre. S'il existe un entier n et deux modules M, N tels que $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) \neq 0$, le plus grand tel entier n est appelé la *dimension globale faible* de A, et on note $\dim.\mathrm{gl.f.}\, A = n$. S'il n'existe pas un tel entier n, on dit que A est de dimension globale faible infinie, ce qu'on uote $\dim.\mathrm{gl.f.}\, A = \infty$. On convient que $\dim.\mathrm{gl.f.}\, 0 = -\infty$.

La dernière définition est symétrique pour la gauche et la droite, en effet, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 2.10. *Soient A une K-algèbre et $n \geq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\dim.\mathrm{gl.f.}\, A \leq n$.
(b) *Pour tout A-module à droite M, on a* $\mathrm{df}\, M_A \leq n$.
(c) *Pour tout A-module à gauche N, on a* $\mathrm{df}\, {}_AN \leq n$.

DÉMONSTRATION. On montre l'équivalence de (a) et (b), celle de (a) et (c) se démontrant de même. Dire que, pour tout module à droite M_A, on a $\mathrm{df}\, M \leq n$ revient, par (2.8), à dire que, pour tout module à droite M_A, on a $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(M, -) = 0$, c'est-à-dire que, pour toute paire de A-modules M_A, ${}_AN$, on a $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(M, N) = 0$. Par définition, cela revient à dire que $\dim.\mathrm{gl.f.}\, A \leq n$. □

Comme, pour tout A-module M, on a $\mathrm{df}\, M \leq \mathrm{dp}\, M$, alors $\dim.\mathrm{gl.f.}\, A \leq \dim.\mathrm{gl.d.}\, A$. Nous allons prouver que, si A est noethérienne à droite, alors on a l'égalité.

LEMME 2.11. *Soient A une K-algèbre noethérienne à droite, et M_A un module de type fini. Alors* $\mathrm{df}\, M = \mathrm{dp}\, M$.

DÉMONSTRATION. Supposons $\mathrm{df}\, M \leq n$. Il existe, par (VI.2.6), une suite exacte

$$0 \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec les P_i projectifs de type fini. Pour tout A-module à gauche N, on a par décalage, $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_1^A(L_{n-1}, N)$. Par conséquent, $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(M, -) = 0$ entraîne $\mathrm{Tor}_1^A(L_{n-1}, -) = 0$. Par (IX.4.6), L_{n-1} est plat. Comme A est noethérienne, L_{n-1} est de type fini, puisque sous-module du module de type fini P_{n-1}, par (VI.2.4). Par (VI.2.8), on en déduit que L_{n-1} est projectif. On a obtenu une résolution projective de M de longueur n et donc $\mathrm{dp}\, M \leq n$. Cela montre bien que $\mathrm{dp}\, M \leq \mathrm{df}\, M$. Comme on a toujours $\mathrm{df}\, M \leq \mathrm{dp}\, M$, on en déduit $\mathrm{dp}\, M = \mathrm{df}\, M$. □

THÉORÈME 2.12. *Soit A une algèbre noethérienne à droite, alors* $\dim.\mathrm{gl.d.}\, A = \dim.\mathrm{gl.f.}\, A$.

DÉMONSTRATION. On a toujours $\dim.\mathrm{gl.f.}A \leq \dim.\mathrm{gl.d.}A$. Réciproquement, on sait, par (2.6), que $\dim.\mathrm{gl.d.}A$ est égal au suprémum des dimensions projectives des A-modules à droite M de type fini. Pour un tel module M, on a $\mathrm{df}\,M = \mathrm{dp}\,M$, par (2.10). Cela entraîne que

$$\begin{aligned}\dim.\mathrm{gl.d.}A &= \sup\{\mathrm{df}\,M \mid M_A \text{ de type fini}\}\\ &\leq \sup\{\mathrm{df}\,M \mid M_A \text{ quelconque}\} = \dim.\mathrm{gl.f.}A\end{aligned}$$

d'où notre énoncé. □

COROLLAIRE 2.13. *Soit A une algèbre noethérienne à droite et à gauche, alors* $\dim.\mathrm{gl.d.}A = \dim.\mathrm{gl.s.}A$. □

Ce corollaire s'applique notamment si K est un corps, et A une K-algèbre de dimension finie. Par exemple, si $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$, on a que $\dim.\mathrm{gl.s.}A = \dim.\mathrm{gl.d.}A = 1$, ce qu'on exprime en écrivant brièvement que $\dim.\mathrm{gl.}A = 1$. Nous examinerons plus loin en détail les algèbres de dimension globale un. Pour l'instant, nous terminons ce chapitre avec une propriété intéressante des matrices de Cartan des algèbres de dimension finie, connexes, réduites, déployées et de dimension globale finie (voir (VIII.5)).

PROPOSITION 2.14. *Soient K un corps, A une K-algèbre de dimension finie connexe, réduite et déployée et de dimension globale finie. Le déterminant de la matrice de Cartan C_A de A est égal à $+1$ ou -1.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que C_A est inversible sur $\mathbb{Z}$. Comme A est de dimension finie, elle admet un nombre fini de modules simples non isomorphes $S(1), \ldots, S(n)$, qui sont respectivement les coiffes des modules indécomposables projectifs non isomorphes $P(1), \ldots, P(n)$. D'autre part, $\dim.\mathrm{gl.}A < \infty$ entraîne que chaque $S(i)$ admet une résolution projective finie

$$0 \longrightarrow P_{i,n_i} \longrightarrow P_{i,n_i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{i,1} \longrightarrow P_{i,0} \longrightarrow S(i) \longrightarrow 0.$$

Par le théorème de décomposition unique (VII.6.13), chacun des $P_{i,k}$ est isomorphe à une somme directe finie des modules indécomposables projectifs $P(j)$, de sorte que

$$\mathbf{dim}S(i) = \sum_{k=1}^{n_i}(-1)^k \mathbf{dim}P_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{dim}P(j)$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Donc le vecteur $\mathbf{dim}S(i)$ de la base canonique du groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{(n)}$ est combinaisou linéaire des vecteurs $\mathbf{dim}P(j)$, où $1 \leq j \leq n$, avec des coefficients entiers. Par conséquent, il existe une matrice R à coefficients entiers telle que

$$[\mathbf{dim}S(1) \mid \cdots \mid \mathbf{dim}S(n)] = [\mathbf{dim}P(1) \mid \cdots \mid \mathbf{dim}P(n)]R.$$

(Ici, la notation $[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]$ avec $\mathbf{v}_i \in \mathbb{Z}^{(n)}$ désigne la matrice ayant pour $i^{\text{ème}}$ colonne le vecteur $\mathbf{v}_i$, avec $1 \leq i \leq n$.)

D'autre part, (VIII.5.3) donne que $[\mathbf{dim}P(1) \mid \cdots \mid \mathbf{dim}P(n)] = C_A$, de sorte que $I = C_A R$. □

Exercices du Chapitre X.

1. Si $\operatorname{dp} M = n < \infty$, montrer qu'il existe un A-module libre L tel que $\operatorname{Ext}_A^n(M, L) \neq 0$.

2. Soit A un domaine d'intégrité. Montrer que tout sous-module non-divisible d'un module divisible est de dimension injective égale à 1.

3. Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte, avec M projectif. Montrer que, soit M' et M'' sont projectifs, soit $\operatorname{dp} M'' = \operatorname{dp} M' + 1$.

4. Soit M un A-module non projectif de dimension projective finie, montrer qu'il existe un A-module de dimension projective égale à un.

5. Montrer que, pour toute algèbre A et tout $n > 0$, on a $\operatorname{dim.gl.d.} A = \operatorname{dim.gl.d.} M_n(A)$.

6. Soient A une K-algèbre artinienne et T la somme directe d'un représentant de chaque classe d'isomorphisme de A-modules simples. Montrer que:

a) $\operatorname{dp} M < n$ si et seulement si $\operatorname{Ext}_A^n(M, T) = 0$.
b) $\operatorname{di} M < n$ si et seulement si $\operatorname{Ext}_A^n(T, M) = 0$.

7. Calculer $\operatorname{dp} \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$, $\operatorname{di} \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$.

8. Soient A une K-algèbre noethérienne à droite et M_A un A-module de type fini tel que $\operatorname{dp} M = n$. Montrer que $\operatorname{Ext}_A^n(M, A) \neq 0$.

9. Prouver (1.7) (1.8) et (1.9).

10. Prouver (1.13) et (1.14).

11. Soient A, B deux K-algèbres, $\varphi : A \to B$ un morphisme et M un B-module (que l'on peut considérer comme un A-module au moyen de φ). Montrer que

$$\operatorname{dp} M_A \leq \operatorname{dp} B_A + \operatorname{dp} M_B.$$

12. Montrer que, si $\operatorname{dp}_A M < n < \infty$, alors $\operatorname{Tor}_n^A(-, M) = 0$.

13. Soit $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de A-modules. Montrer que:

(a) $\operatorname{df} N \leq \sup\{\operatorname{df} M, \operatorname{df} L + 1\}$ et l'égalité a lieu si $\operatorname{df} M \neq \operatorname{df} L$.
(b) $\operatorname{df} L \leq \sup\{\operatorname{df} M, \operatorname{df} N - 1\}$ et l'égalité a lieu si $\operatorname{df} M \neq \operatorname{df} N$.
(c) $\operatorname{df} M \leq \sup\{\operatorname{df} L, \operatorname{df} N\}$ et l'égalité a lieu si $\operatorname{df} N \neq \operatorname{df} L + 1$.

14. Montrer que pour une K-algèbre A, les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) $\operatorname{dim.gl.d.} A \leq 2$.
(b) Le noyau d'un morphisme entre A-modules projectifs est projectif.
(c) Le conoyau d'un morphisme entre A-modules injectifs est injectif.

15. Soient K un corps et A une K-algèbre de dimension finie. Notons T la somme directe d'un représentant de chaque classe d'isomorphisme de A-modules simples. Montrer que, pour un A-module M, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{dp} M &= \sup\{n \mid \operatorname{Ext}^n_A(M,T) \neq 0\} \\ &= \sup\{n \mid \operatorname{Tor}^A_n(M,T) \neq 0\} \\ \text{et} \quad \operatorname{di} M &= \sup\{n \mid \operatorname{Ext}^n_A(T,M) \neq 0. \end{aligned}$$

En déduire que l'on a $\operatorname{dim.gl.} A = \operatorname{dp} T_A = \operatorname{di}{}_A T = \sup\{n \mid \operatorname{Ext}^n_A(T,T) \neq 0\} = \sup\{n \mid \operatorname{Tor}^A_n(T,T) \neq 0\}$.

16. Soient A une K-algèbre et M_A un module. Montrer que si $\operatorname{dim.gl.d.} A = n$ et $\operatorname{dp} M = n-1$ alors tout sous-module M' de M est tel que $\operatorname{dp} M' \leq n-1$.

17. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des K-algèbres et $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Montrer que

$$\operatorname{dim.gl.d.} A = \sup\{\operatorname{dim.gl.d.} A_i \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

18. Calculer la dimension globale de chacune des algèbres de matrices suivantes sur un corps K:

(a) $A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 \\ K & K & K & K \end{bmatrix}$.

19. Soient K un corps et $n \geq 2$. Montrer que $A = T_n(K)$ est de dimension globale 1, et que $B = A/\operatorname{rad}^2 A$ est de dimension globale $n+1$.

20. Soient K un corps et t une indéterminée. Montrer que l'algèbre $A = K[t]/\langle t^2 \rangle$ est de dimension globale infinie.

CHAPITRE XI

Homologie et cohomologie des algèbres.

Il existe une autre approche homologique à l'étude des algèbres. Elle consiste à considérer l'algèbre A comme un $(A-A)$-bimodule, à en construire une résolution projective dans la catégorie des $(A-A)$-bimodules, puis à calculer l'homologie et la cohomologie à coefficients dans un bimodule fixe M. L'intérêt de cette approche, due à Hochschild, est que les premiers groupes d'homologie et de cohomologie s'expriment de façon aussi simple que concrète. Elle nous amène également à l'étude d'une classe particulièrement intéressante d'algèbres semisimples, qu'on appelle les algèbres séparables. Le chapitre s'achève sur un théorème de structure important, connu sous le nom de Théorème Principal de Wedderburn (2.9). Dans tout ce chapitre, nous supposerons que K est un corps commutatif et A une K-algèbre de dimension finie. Cette hypothèse permet d'arriver le plus vite possible aux résultats essentiels.

1. Cohomologie de Hochschild d'une algèbre.

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre de dimension finie. On rappelle que A^{op} désigne l'algèbre opposée de A.

DÉFINITION. *L'algèbre enveloppante* A^e de A est la K-algèbre définie par $A^e = A^{\mathrm{op}} \otimes_K A$.

Comme on l'a vu dans (V.1.8) la structure de K-espace vectoriel de A^e est donc la même que celle du K-espace vectoriel $A \otimes_K A$, tandis que la multiplication est définie par

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = a'a \otimes bb'$$

(pour $a, a', b, b' \in A$). On voit de suite que A^e est également une K-algèbre de dimension finie, et que $\dim_K A^e = (\dim_K A)^2$, par (V.1.7). D'autre part, le rôle du corps K est essentiel dans la formation du produit tensoriel, et donc l'algèbre enveloppante dépend des propriétés de K. La raison pour laquelle on introduit l'algèbre enveloppante est que l'on veut étudier les $(A-A)$-bimodules. Comme il est commode de parler de modules plutôt que de bimodules, on montrera que tout $(A-A)$-bimodule est un A^e-module et réciproquement.

LEMME 1.1. *Soit A une K-algèbre de dimension finie. Les catégories de $(A-A)$-bimodules et de A^e-modules (à droite) sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. Soit M un $(A-A)$-bimodule. On donne à M une structure de A^e-module par

$$x(a\otimes b)=(ax)b=a(xb)$$

(pour $x\in M$, $a,b\in A$). La seconde égalité est vraie parce que M est un bimodule. Il suffit de vérifier l'associativité mixte de la multiplication. Or

$$\begin{aligned}[x(a\otimes b)](a'\otimes b') &= (axb)(a'\otimes b')\\ &= a'axbb'\\ &= x(a'a\otimes bb')\\ &= x[(a\otimes b)(a'\otimes b')]\end{aligned}$$

(pour $x\in M$, $a,b,a',b'\in A$). Réciproquement, soit M un A^e-module à droite, on définit une structure de $(A-A)$-bimodule par

$$ax=x(a\otimes 1)\quad\text{et}\quad xb=x(1\otimes b)$$

(pour $x\in M$, $a,b\in A$). La vérification des axiomes est immédiate et on voit de suite que les foncteurs décrits sont des équivalences quasi-inverses. □

Par exemple, l'algèbre A a une strncture naturelle de $(A-A)$-bimodule (définie par la multiplication de A), et donc de A^e-module à droite. Le lemme précédent nous permettra de passer continuellement d'une catégorie à une autre, et nous utiliserons à chaque fois le langage le mieux adapté à la situation.

DÉFINITION. Soit M un $(A-A)$-bimodule. Pour chaque entier $n\geq 0$, le $n^{\text{ème}}$ *espace de cohomologie de Hochschild* de A à coefficients dans M est le K-espace vectoriel $H^n(A,M)=\mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,M)$.

L'objectif de ce chapitre sera d'utiliser ces espaces pour étudier la structure de l'algèbre A.

Pour calculer $H^n(A,M)$, on doit, comme expliqué en (IX.3), construire une résolution projective de A dans $\mathrm{Mod}\,A^e$, puis appliquer le foncteur $\mathrm{Hom}_{A^e}(-,M)$. Comme $H^n(A,M)$ ne dépend pas de la résolution projective particulière choisie, il suffit d'en construire une.

Soit $n\geq -1$ un entier. On définit une suite de K-espaces vectoriels $S_n(A)$ par récurrence comme suit:

$$\begin{aligned} S_{-1}(A) &= A\\ S_0(A) &= A\otimes_K A\\ \text{et}\qquad S_{n+1}(A) &= A\otimes_K S_n(A)\qquad \text{pour } n\geq 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $S_n(A)=A^{\otimes(n+2)}$ (avec la notation de (V.4)). Chaque $S_n(A)$ est muni d'une structure naturelle de A^e-module définie par

$$(a_0\otimes\cdots\otimes a_{n+1})(a\otimes b)=(aa_0)\otimes a_1\otimes\cdots\otimes(a_{n+1}b)$$

pour $a_0, \ldots, a_{n+1}, a, b \in A$. On définit, pour chaque $n \geq 0$, une application $d_n : S_n(A) \to S_{n-1}(A)$ par

$$d_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n).$$

Il suit de la définition que d_n est uue application A-linéaire à gauche et aussi à droite, donc est un morphisme de $(A - A)$-bimodules. On affirme que cette donnée définit un complexe.

LEMME 1.2. *Avec les notations précédentes, $(S_n(A), d_n)$ est un complexe de A^e-modules.*

DÉMONSTRATION. Soit $s_n : S_n(A) \to S_{n+1}(A)$ l'application K-linéaire définie par $s_n(x) = 1 \otimes x$ (pour $x \in S_n(A)$). Il est évident que s_n est en fait A^{op}-linéaire. D'autre part, s_n est injective, puisque l'application $t_n : S_{n+1}(A) \to S_n(A)$ définie par $t_n(a \otimes x) = ax$ (pour $a \in A$, $x \in S_n(A)$) satisfait $t_n s_n = 1_{S_n(A)}$. En outre, pour chaque $n \geq 0$, on a

$$(*) \qquad d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n = 1_{S_n(A)}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}&(d_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \\ &= d_{n+1}(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + s_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1})\right) \\ &= a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}\end{aligned}$$

(pour $a_0, \ldots, a_{n+1} \in A$) puisque les autres termes s'annulent deux à deux.

Par ailleurs, $d_0 d_1 = 0$ puisque

$$\begin{aligned} d_0 d_1(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2) &= d_0[(a_0 a_1) \otimes a_2 - a_0 \otimes (a_1 a_2)] \\ &= (a_0 a_1)a_2 - a_0(a_1 a_2) = 0 \end{aligned}$$

(pour $a_0, a_1, a_2 \in A$). Par conséquent, la formule $(*)$ donne

$$\begin{aligned} d_n d_{n+1} s_n &= d_n - d_n s_{n-1} d_n \\ &= (1_{S_{n-1}(A)} - d_n s_{n-1}) d_n \\ &= s_{n-2} d_{n-1} d_n \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$. Par récurrence, on a donc $d_n d_{n+1} s_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Comme l'image de s_n engendre évidemment $S_{n+1}(A)$ en tant que A^{op}-module, on a bien $d_n d_{n+1} = 0$ pour tout $n > 0$. □

On remarque que l'application $d_0 : S_0(A) \to S_{-1}(A)$ (c'est-à-dire $d_0 : A \otimes_K A \to A$) n'est autre que la multiplication $a_0 \otimes a_1 \mapsto a_0 a_1$ (pour $a_0, a_1 \in A$). Elle est évidemment surjective, de sorte que l'on a un complexe de A^e-modules:

$$S_* \qquad \cdots \longrightarrow S_2(A) \xrightarrow{d_2} S_1(A) \xrightarrow{d_1} S_0(A) \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0.$$

Le complexe $S_* = (S_n(A), d_n)$ est appelé le *complexe standard* de A. Si on note L_0 le noyau de la multiplication d_0, on a aussi une suite exacte courte de A^e-modules

$$0 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{j_0} A \otimes_K A \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0.$$

Il est parfois utile d'écrire $S_n(A)$ sous la forme:

$$S_n(A) = A \otimes_K \widetilde{S}_n(A) \otimes_K A \xrightarrow{\sim} \widetilde{S}_n(A) \otimes_K A^e$$

où $\widetilde{S}_0(A) = K$ et $\widetilde{S}_n(A) = A^{\otimes n}$ pour $n \geq 0$. Cette écriture présente l'avantage de mettre en évidence l'action de A^e. Elle permet aussi de montrer tout de suite que S_* est une résolution projective du A^e-module A. En effet, comme A est un K-espace vectoriel, il est libre en tant que K-module, donc $\widetilde{S}_n(A) = A^{\otimes n}$ est aussi un K-module libre (par (V.1.6)) et par conséquent $S_n(A) \xrightarrow{\sim} \widetilde{S}_n(A) \otimes_K A^e$ est un A^e-module projectif. (Le lecteur remarquera qu'ici nous utilisons pour la première fois l'hypothèse que K est un corps, autrement il faudrait, pour que S_* soit toujours une résolution projective de A_{A^e}, supposer que A est un K-module projectif.)

Les espaces de cohomologie de Hochschild sont obtenus en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, M)$ au complexe standard, en supprimant le premier terme non nul du complexe résultant, ce qui donne le complexe

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A^e}(S_0(A), M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{A^e}(d_1, M)} \mathrm{Hom}_{A^e}(S_1(A), M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{A^e}(d_2, M)} \mathrm{Hom}_{A^e}(S_2(A), M) \longrightarrow \cdots$$

dont on calcule la cohomologie. Il suit de l'isomorphisme d'adjonction (V.2.1) que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{A^e}(S_n(A), M) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A^e}\left(\widetilde{S}_n(A) \otimes_K A^e, M\right) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K\left(\widetilde{S}_n(A), \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, M)\right) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K\left(\widetilde{S}_n(A), M\right) \end{aligned}$$

où on a aussi utilisé (II.5.3). En particulier, $\mathrm{Hom}_{A^e}(S_0(A), M) \xrightarrow{\sim} M_K$. Si on calcule l'effet de isomorphismes fonctoriels précédents sur les différentielles $\mathrm{Hom}_{A^e}(d_i, M)$, on voit que l'on peut identifier le complexe précédent au complexe $C^* = (C^n, \delta^n)$, où $C^0 = M$, $C^n = \mathrm{Hom}_K\left(\widetilde{S}_n(A), M\right)$ pour $n \geq 1$ et les applications K-linéaires δ^n sont définies comme suit. L'application $\delta^0 : M \to \mathrm{Hom}_K(A, M)$ est définie par $\delta^0(x)(a) = ax - xa$ (pour $a \in A$ et $x \in M$). Pour $n \geq 1$, l'application $\delta^n : \mathrm{Hom}_K\left(\widetilde{S}_n(A), M\right) \to \mathrm{Hom}_K\left(\widetilde{S}_{n+1}(A), M\right)$ est définie par

$$\begin{aligned} &\delta^n(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1} \end{aligned}$$

(pour $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A$ et $f \in \mathrm{Hom}_K\left(\widetilde{S}_n(A), M\right)$). On obtient donc, pour tout $n \geq 1$,

$$H^n(A, M) = \mathrm{Ker}\,\delta^n / \mathrm{Im}\,\delta^{n-1}.$$

On laisse au lecteur la vérification qne les δ^n sont effectivement donnés par ces formules.

Cette reformulation nous permettra de donner une description explicite des espaces $H^0(A, M)$, $H^1(A, M)$ et $H^2(A, M)$. On voit de suite que $H^0(A, M) = \mathrm{Ext}^0_{A^e}(A, M)$ n'est autre que le K-espace $\mathrm{Hom}_{A^e}(A, M)$. Il existe une autre description.

LEMME 1.3. *L'espace $H^0(A, M)$ est isomorphe au sous-K-espace de M formé des $x \in M$ tels que $ax = xa$.*

DÉMONSTRATION. Cela suit en effet de ce que $H^0(A, M) = \mathrm{Ker}\,\delta^0$ et de la définition de δ^0. □

Si, par exemple, M est égal au bimodule ${}_AA_A$, alors $H^0(A, A)$ est isomorphe au centre de A.

Nous voulons maintenant décrire le premier espace de cohomologie $H^1(A, M)$ et à cet effet introduisons la notion de dérivation.

DÉFINITION. Soient A une K-algèbre de dimension finie et M un $A-A$-bimodule. Une *dérivation* (ou *homomorphisme croisé*) $\delta : A \to M$ est une application K-linéaire telle qne

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$$

(pour $a, b \in A$).

Il est clair que les dérivations de A dans M forment un sous-espace $\mathrm{Der}(A, M)$ du K-espace $\mathrm{Hom}_K(A, M)$. On note aussi que, pour toute dérivation $\delta : A \to M$, on a $\delta(1) = 0$. En effet, cela suit du calcul suivant:

$$\delta(1) = \delta(1^2) = 1 \cdot \delta(1) + \delta(1) \cdot 1 = \delta(1) + \delta(1).$$

Par exemple, chaque $x \in M$ induit une dérivation $\delta_x : A \to M$ par

$$\delta_x(a) = ax - xa$$

(pour $a \in A$). Une telle dérivation est dite *interne.* Les dérivations internes de A dans M forment évidemment un sons-espace $\mathrm{IDer}(A, M)$ de $\mathrm{Der}(A, M)$. Il existe en général des dérivations qui ne sont pas internes: par exemple, si $A = K[t]/\langle t^2 \rangle$ et $M = {}_AA_A$, alors $\delta : A \to A$ définie par

$$\delta(\alpha \cdot \bar{1} + \beta \cdot \bar{t}) = \beta \cdot \bar{t}$$

(pour $\alpha, \beta \in K$) où $\bar{1}$ et $\bar{t}$ désignent, comme d'ordinaire, les classes respectives de 1 et t dans A, est une dérivation mais pas une dérivation interne.

LEMME 1.4. *L'espace $H^1(A, M)$ est isomorphe à l'espace quotient*

$$\mathrm{Der}(A, M) / \mathrm{IDer}(A, M).$$

DÉMONSTRATION. On sait que $\operatorname{Ker}\delta^1$ est l'ensemble des applications K-linéaires $f : A \to M$ telles que $\delta^1 f = 0$. Comme

$$(\delta^1 f)(a_1 \otimes a_2) = a_1 f(a_2) - f(a_1 a_2) + f(a_1)a_2$$

(pour $a_1, a_2 \in A$), on en déduit que $f \in \operatorname{Ker}\delta^1$ si et seulement si f est une dérivation. De même, $\operatorname{Im}\delta^0$ est l'ensemble des applications K-linéaires $f : A \to M$ telles qu'il existe $x \in M$ avec $f = \delta^0(x) = \delta_x$, c'est-à-dire que f est une dérivation interne. □

Pour interpréter maintenant $H^2(A, M) = \operatorname{Ker}\delta^2 / \operatorname{Im}\delta^1$, on considère les *extensions de* A, c'est-à-dire les morphismes surjectifs d'algèbres $\pi : B \to A$. Si on note M le noyau de π (qui est évidemment un idéal bilatère de B), on a une suite exacte courte de K-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

où $\iota : M \to B$ est l'inclusion. Comme A et B sont des K-espaces vectoriels, π admet une section K-linéaire, c'est-à-dire qu'il existe une application K-linéaire $\sigma : A \to B$ telle que $\pi\sigma = 1_A$. En général, σ n'est pas un morphisme d'algèbres. Si c'est le cas, on a que B est (en tant que K-espace vectoriel) isomorphe à la somme directe de la sous-algèbre $\sigma(A)$ (isomorphe à A) et de l'idéal M. L'extension π est alors dite *une extension scindée* (d'algèbres).

Si σ n'est pas un morphisme d'algèbres, il est naturel d'essayer de mesurer à quel point ce n'est pas le cas. Un instrument de mesure naturel est l'application $f : A \times A \to B$ définie par

$$f(a_1, a_2) = \sigma(a_1 a_2) - \sigma(a_1)\sigma(a_2)$$

(pour $a_1, a_2 \in A$). On voit de suite que f est K-bilinéaire (car σ est K-linéaire). En outre, l'image de f est contenue dans M: en effet, $\pi : B \to A$ est un morphisme d'algèbres tel que $\pi\sigma = 1_A$ et donc

$$\begin{aligned}\pi f(a_1, a_2) &= \pi\sigma(a_1 a_2) - \pi[\sigma(a_1)\sigma(a_2)] \\ &= a_1 a_2 - \pi\sigma(a_1)\pi\sigma(a_2) \\ &= a_1 a_2 - a_1 a_2 = 0\end{aligned}$$

(pour tous $a_1, a_2 \in A$), ce qui donne bien $f(a_1, a_2) \in M$. Enfin, l'associativité de la multiplication de A induit une condition sur f. Soient $a_1, a_2, a_3 \in A$, alors

$$\begin{aligned}\sigma((a_1 a_2)a_3) &= \sigma(a_1 a_2)\sigma(a_3) + f(a_1 a_2, a_3) \\ &= \sigma(a_1)\sigma(a_2)\sigma(a_3) + f(a_1, a_2)\sigma(a_3) + f(a_1 a_2, a_3)\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}\sigma(a_1(a_2 a_3)) &= \sigma(a_1)\sigma(a_2 a_3) + f(a_1, a_2 a_3) \\ &= \sigma(a_1)\sigma(a_2)\sigma(a_3) + \sigma(a_1)f(a_2, a_3) + f(a_1, a_2 a_3).\end{aligned}$$

En égalisant ces deux quantités, on obtient

$$f(a_1 a_2, a_3) - f(a_1, a_2 a_3) + f(a_1, a_2)\sigma(a_3) - \sigma(a_1)f(a_2, a_3) = 0.$$

Afin de comparer les extensions $\pi : B \to A$ aux espaces de cohomologie, il faudrait munir l'idéal bilatère M de B d'une structure de $(A-A)$-bimodule telle que

$$xa = x\sigma(a)$$

et

$$ax = \sigma(a)x$$

(pour $x \in M$ et $a \in A$). Si $\sigma : A \to B$ est un morphisme d'algèbres, cela fait évidemment de M un $(A-A)$-bimodule (en effet, c'est simplement un changement de scalaires au sens de (II.1.3)(g)). Par contre, si σ n'est pas un morphisme d'algèbres, une condition suffisante pour que la définition précédente munisse M d'une structure de $(A-A)$-bimodule est que $M^2 = 0$ (ce qu'on supposera toujours dans la suite de cette discussion). Dans ce cas,

$$\begin{aligned}(xa_1)a_2 - x(a_1a_2) &= [x\sigma(a_1)]\sigma(a_2) - x\sigma(a_1a_2) \\ &= -xf(a_1, a_2) = 0\end{aligned}$$

puisque $f(a_1, a_2) \in M$ (pour $x \in M$ et $a_1, a_2 \in A$).

Ces considérations motivent la définition suivante.

DÉFINITION. Soient A une K-algèbre et M un $(A-A)$-bimodule. Une fonction K-bilinéaire $f : A \times A \to M$ est appelée un *ensemble de facteurs* si

$$f(a_1a_2, a_3) - f(a_1, a_2a_3) + f(a_1, a_2)a_3 - a_1 f(a_2, a_3) = 0$$

(pour $a_1, a_2, a_3 \in A$).

Notre objectif présent est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que σ soit un morphisme d'algèbres. Rappelons que l'on a un isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$B \xrightarrow{\sim} \sigma(A) \oplus M \xrightarrow{\sim} A \oplus M.$$

Il est évident que cet isomorphisme induit un isomorphisme de K-algèbres $A \oplus M \xrightarrow{\sim} B$ donné par $a + x \mapsto \sigma(a) + x$ (pour $a \in A$ et $x \in M$) si on définit la multiplication dans le K-espace vectoriel $A \oplus M$ par transport de structure, c'est-à-dire par

$$(a_1 + x_1)(a_2 + x_2) = a_1a_2 + a_1x_2 + x_1a_2 + f(a_1, a_2)$$

(ponr $a_1, a_2 \in A$ et $x_1, x_2 \in M$). Dire que σ est un morphisme de K-algèbres revient alors à dire que la composition de σ avec l'isomorphisme $B \xrightarrow{\sim} A \oplus M$ est un morphisme de K-algèbres, ou encore qu'il existe une application K-linéaire $\rho : A \to M$ telle que $\overline{\rho} = \left[\begin{smallmatrix} 1_A \\ -\rho \end{smallmatrix}\right] : A \to A \oplus M$ soit un morphisme de K-algèbres. Or, pour $a_1, a_2 \in A$, on a

$$\begin{aligned}\overline{\rho}(a_1)\overline{\rho}(a_2) &= (a_1 - \rho(a_1))(a_2 - \rho(a_2)) \\ &= a_1a_2 - \rho(a_1)a_2 - a_1\rho(a_2) + f(a_1, a_2)\end{aligned}$$

tandis que

$$\overline{\rho}(a_1a_2) = a_1a_2 - \rho(a_1a_2).$$

Il faudrait donc avoir

$$f(a_1, a_2) = \rho(a_1)a_2 + a_1\rho(a_2) - \rho(a_1a_2).$$

Notons que cette relation entraîne que, pour tout $a \in A$, on a $f(a,1) = a\rho(1)$: en effet, $f(a,1) = \rho(a) \cdot 1 + a\rho(1) - \rho(a \cdot 1) = a\rho(1)$. Par conséquent, $1 - \rho(1)$ est l'identité de $A \oplus M$, puisque

$$(a+x)(1-\rho(1)) = a + x - a\rho(1) + f(a,1) = a + x$$

et de même $(1-\rho(1))(a+x) = a + x$ pour tous $a \in A$, $x \in M$. Donc $\overline{\rho}(1) = 1 - \rho(1)$. On a montré que σ est un morphisme de K-algèbres si et seulement s'il existe une application K-linéaire $\rho : A \to M$ telle que

$$f(a_1, a_2) = \rho(a_1)a_2 - \rho(a_1a_2) + a_1\rho(a_2).$$

Cela mène à la définition suivante.

Définition. Soient A une K-algèbre et M un $(A-A)$-bimodule. Un ensemble de facteurs $f : A \times A \to M$ est dit *scindé* s'il existe une application K-linéaire $\rho : A \to M$ telle que

$$f(a_1, a_2) = a_1\rho(a_2) - \rho(a_1a_2) + \rho(a_1)a_2$$

(pour $a_1, a_2 \in A$).

La discussion précédente se résume dans le lemme suivant.

Lemme 1.5. *Soient $\pi : B \to A$ une extension dont le noyau M satisfait $M^2 = 0$ et $\sigma : A \to B$ une section K-linéaire de π. Alors l'application K-bilinéaire $f : A \times A \to M$ définie par*

$$f(a_1, a_2) = \sigma(a_1a_2) - \sigma(a_1)\sigma(a_2)$$

(pour $a_1, a_2 \in A$) est un ensemble de facteurs. L'extension π est scindée si et seulement si f est un ensemble de facteurs scindé. □

Il est maintenant facile de décrire $H^2(A, M)$.

Proposition 1.6. *Soient A une K-algèbre et M un $(A-A)$-bimodule. Il existe une bijection entre $H^2(A,M)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions de A ayant pour noyau M, où $M^2 = 0$. Dans cette bijection, l'élément zéro de $H^2(A,M)$ correspond aux extensions scindées.*

Démonstration. Avec les notations précédentes, on a que $H^2(A,M) = \operatorname{Ker}\delta^2/\operatorname{Im}\delta^1$. Or, pour une application K-linéaire $g : A \otimes_K A \to M$, on a que $\delta^2 g$ est définie par

$$(\delta^2 g)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = a_1 g(a_2 \otimes a_3) - g(a_1a_2 \otimes a_3) + g(a_1 \otimes a_2a_3) - g(a_1 \otimes a_2)a_3$$

(pour $a_1, a_2, a_3 \in A$). On sait qu'il existe une bijection naturelle entre applications K-linéaires $A \otimes_K A \to M$ et applications K-bilinéaires $A \times A \to M$ (par définition du produit tensoriel $A \otimes_K A$). Soit f l'application K-bilinéaire correspondant à g, de sorte que

$$f(a_1, a_2) = g(a_1 \otimes a_2)$$

(pour $a_1, a_2 \in A$). Dire que $g \in \operatorname{Ker} \delta^2$ revient donc à dire que f satisfait l'identité suivante:

$$a_1 f(a_2, a_3) - f(a_1 a_2, a_3) + f(a_1, a_2 a_3) - f(a_1, a_2) a_3 = 0$$

c'est-à-dire que f est un ensemble de facteurs. De même, dire que $g \in \operatorname{Im} \delta^1$ veut dire qu'il existe une application K-linéaire $\rho : A \to M$ telle que $g = \delta^1 \rho$. Or, pour $a_1, a_2 \in A$, on a

$$(\delta^1 \rho)(a_1 \otimes a_2) = a_1 \rho(a_2) - \rho(a_1 a_2) + \rho(a_1) a_2$$

de sorte que $f(a_1, a_2) = a_1 \rho(a_2) - \rho(a_1 a_2) + \rho(a_1) a_2$. En d'autres termes, f est un ensemble de facteurs scindé. $\square$

Un exemple particulièrement important d'extension scindée est le suivant: si A est une K-algèbre de dimension finie, et M un $(A - A)$-bimodule, on définit l'extension triviale de A par M (voir l'exercice (I.15)) comme étant la K-algèbre dont le K-espace vectoriel sous-jacent est $A \oplus M = A \times M = \{(a, x) \mid a \in A, x \in M\}$ et la multiplication est définie par

$$(a_1, x_1)(a_2, x_2) = (a_1 a_2, a_1 x_2 + x_1 a_2)$$

(pour $a_1, a_2 \in A$ et $x_1, x_2 \in M$). L'ensemble de facteurs correspondant est l'application bilinéaire nulle, qui est évidemment scindée. Par (1.6), toute extension triviale de A par M correspond à l'élément zéro de $H^2(A, M)$.

On a parlé jusqu'ici de cohomologie et non d'homologie. On achève donc cette section avec quelques mots sur les espaces d'homologie de Hochschild.

Notons que si A est une K-algèbre de dimension finie, et M est un $(A - A)$-bimodule, alors M peut être muni d'une structure naturelle de A^e-module à gauche par

$$(a \otimes b)x = (bx)a = b(xa)$$

(pour $x \in M$ et $a, b \in A$).

DÉFINITION. Soient A une K-algèbre de dimension finie et M un $(A - A)$-bimodule, considéré comme un A^e-module à gauche. Le $n^{\text{ème}}$ *espace d'homologie de Hochschild* de A à coefficients dans M est l'espace

$$H_n(A, M) = \operatorname{Tor}_n^{A^e}(A, M).$$

Afin de calculer les espaces d'homologie, il faut prendre une résolution projective de A considéré comme A^e-module à droite (par exemple, le complexe standard), puis appliquer le foncteur $- \otimes_{A^e} M$. Nous montrerons ici comment calculer $H_0(A, M)$. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant, qui sera également utile dans la section suivante.

LEMME 1.7. *Soit A une K-algèbre de dimension finie. Le noyau L_0 de la multiplication $d_0 : A \otimes_K A \to A$, $a \otimes b \mapsto ab$ (pour $a, b \in A$) est, en tant que A^e-module à droite, engendré par les éléments de la forme $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ (pour $a \in A$).*

DÉMONSTRATION. En effet, on a $(a \otimes 1 - 1 \otimes a) \in L_0$ pour tout $a \in A$. Réciproquement, si $\sum a_i \otimes b_i \in L_0$, alors $\sum a_i b_i = 0$ et donc

$$\sum a_i \otimes b_i = \sum (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)(1 \otimes b_i)$$

d'où l'énoncé. □

COROLLAIRE 1.8. *L'espace $H_0(A, M)$ est isomorphe au quotient de M par le sous-espace engendré par les éléments de la forme $xa - ax$ (pour $x \in M$ et $a \in A$).*

DÉMONSTRATION. On a en effet une suite exacte conrte de A^e-modules extraite du complexe standard

$$0 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{j_o} A \otimes_K A \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur $- \otimes_{A^e} M$ et en tenant compte des isomorphismes $(A \otimes_K A) \otimes_{A^e} M \xrightarrow{\sim} A^e \otimes_{A^e} M \xrightarrow{\sim} M$, on voit que

$$\begin{aligned} H_0(A, M) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker}(L_0 \otimes_{A^e} M \to M) \\ &\xrightarrow{\sim} M / L_0 M. \end{aligned}$$

Il suit alors de (1.7) que $L_0 M$ est engendré par les éléments de la forme $xa - ax$ (pour $x \in M$ et $a \in A$). □

2. Algèbres séparables.

On rappelle que l'on a une suite exacte courte de Mod A^e, extraite du complexe standard de A

$$0 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{j_o} A^e \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

où $d_0 : A \otimes_K A \to A$ est la multiplication $a \otimes b \mapsto ab$ (pour $a, b \in A$).

DÉFINITION. Une K-algèbre A est dite *séparable* si la multiplication d_0 : $A \otimes_K A \to A$ admet une section A^e-linéaire (en d'autres termes, si la suite exacte courte précédente est scindée dans Mod A^e).

THÉORÈME 2.1. *Soit A une K-algèbre de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est séparable.*
(b) *A est projectif en tant que A^e-module.*
(c) *Il existe des éléments $a_1, \ldots, a_t, a'_1, \ldots, a'_t \in A$ tels que $\sum_{i=1}^{t} a_i a'_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{t} b a_i \otimes a'_i = \sum_{i=1}^{t} a_i \otimes a'_i b$ pour tout $b \in A$.*

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (a) et de (b) suit de (IV.2.4). Nous montrons donc l'équivalence de (a) et (c). Supposons A séparable et soit $d : A \to A \otimes_K A$ une section A^e-linéaire de la multiplication d_0. Alors $d(1) \in A \otimes_K A$ de sorte qu'il existe des éléments $a_1, \ldots, a_t, a'_1, \ldots, a'_t$ de A tels que $d(1) = \sum_{i=1}^{t} a_i \otimes a'_i$. Comme $d_0 d = 1_A$, la relation $d_0 d(1) = 1$ s'exprime par $\sum_{i=1}^{t} a_i a'_i = 1$. D'autre part, d étant un morphisme de A^e-modules, c'est-à-dire de $(A - A)$-bimodules, on a

$$bd(1) = d(b) = d(1)b$$

pour tout $b \in A$, ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{t} ba_i \otimes a'_i = \sum_{i=1}^{t} a_i \otimes a'_i b$$

pour tout $b \in A$. On a montré que (a) implique (c). Réciproquement, supposons (c) satisfaite, et définissons $d : A \to A \otimes_K A$ par $d(b) = \sum_{i=1}^{t} ba_i \otimes a'_i$ (pour $b \in A$). Alors $d_0 d(1) = 1$ et $bd(1) = d(1)b$ pour $b \in A$ donnent bien que d est A^e-linéaire et tel que $d_0 d = 1_A$. □

L'élément $\sum_{i=1}^{t} a_i \otimes a'_i$ de A^e défini par la partie (c) du théorème est appelé un *idempotent de séparabilité* pour A. Le lemme suivant donne deux exemples importants d'algèbres séparables.

LEMME 2.2. (a) *Soit $n > 0$, alors $M_n(K)$ est séparable.*

(b) *Soit G un groupe fini tel que la caractéristique de K ne divise pas l'ordre du groupe, alors KG est séparable.*

DÉMONSTRATION. (a) Pour un $1 \leq j \leq n$ fixe, on prend $a_i = \mathbf{e}_{ij}$ et $a'_i = \mathbf{e}_{ji}$ de sorte que $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_{ij} \otimes \mathbf{e}_{ji}$ joue le rôle de l'idempotent de séparabilité. On a en effet

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_{ii} = 1$$

tandis que pour tout $\mathbf{a} \in M_n(K)$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}\mathbf{e}_{ij} \otimes \mathbf{e}_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_{ij} \otimes \mathbf{e}_{ji}\mathbf{a}.$$

En effet, il suffit de prouver cette dernière relation avec $\mathbf{a}$ égal à un élément quelconque $\mathbf{e}_{kl}$ de la base canonique de $M_n(K)$. Or on a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_{kl}\mathbf{e}_{ij} \otimes \mathbf{e}_{ji} = \mathbf{e}_{kj} \otimes \mathbf{e}_{jl} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_{ij} \otimes \mathbf{e}_{ji}\mathbf{e}_{kl}.$$

(b) Soit n l'ordre de G, alors il suit de l'hypothèse que $\frac{1}{n} \in K$. On prend pour idempotent de séparabilité l'élément $\frac{1}{n} \sum_{x \in G} x^{-1} \otimes x$ de $(KG)^e$. Il est clair que $\frac{1}{n} \sum_{x \in G} x^{-1} x = 1$ et d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{x \in G} x^{-1} \otimes xa &= \frac{1}{n} \sum_{x \in G} a(xa)^{-1} \otimes xa \\ &= \frac{1}{n} \sum_{y \in G} ay^{-1} \otimes y \end{aligned}$$

pour tout $a \in G$, donc pour tout $a \in KG$. □

On note que $M_n(K)$ et KG sont des K-algèbres semisimples (par (VI.7.1) et (VI.7.9), respectivement). En fait, c'est le cas pour toute K-algèbre séparable, par le lemme suivant.

LEMME 2.3. *Soit A une K-algèbre séparable, alors A est semisimple.*

DÉMONSTRATION. Il suffit, par (VI.7.1), de montrer que tout A-module M_A est projectif. Or, dire que A est séparable revient à dire qu'il existe un $(A-A)$-bimodule X et un isomorphisme de $(A-A)$-bimodules $A \otimes_K A \xrightarrow{\sim} A \oplus X$. En appliquant le foncteur $M \otimes_A -$, on en déduit un isomorphisme de A-modules

$$M \otimes_A A \otimes_K A \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A A) \oplus (M \otimes_A X).$$

L'isomorphisme fonctoriel $M \otimes_A A_A \xrightarrow{\sim} M_A$ de (V.1.4) donne que M_A est un facteur direct de $M \otimes_K A_A$. Comme K est un corps, M_K est libre de sorte que $M \otimes_K A_A$ l'est aussi. Par conséquent, M_A est projectif. □

LEMME 2.4. *Soient A_1, A_2 deux K-algèbres séparables, alors $A = A_1 \times A_2$ est séparable.*

DÉMONSTRATION. On note $d_0 : A \otimes_K A \to A$, $a \otimes a' \mapsto aa'$ (pour $a, a' \in A$) la multiplication de A et de même d_1, d_2 les multiplications respectives de A_1 et A_2. Comme A_1 et A_2 sont séparables, il existe des applications $d_1' : A_1 \to A_1 \otimes_K A_1$ et $d_2' : A_2 \to A_2 \otimes_K A_2$, respectivement A_1^e-linéaire et A_2^e-linéaire, telles que $d_1 d_1' = 1_{A_1}$ et $d_2 d_2' = 1_{A_2}$. D'autre part, on a évidemment un isomorphisme de K-algèbres

$$A \otimes_K A \xrightarrow{\sim} (A_1 \otimes_K A_1) \times (A_1 \otimes_K A_2) \times (A_2 \otimes_K A_1) \times (A_2 \otimes_K A_2).$$

On définit $d' : A \to A \otimes_K A$ par

$$d'(a_1, a_2) = (d_1'(a_1), 0, 0, d_2'(a_2))$$

pour $(a_1, a_2) \in A$. On laisse au lecteur la vérification facile que d' est A^e-linéaire et telle que $dd' = 1_A$. □

COROLLAIRE 2.5. *Soit K un corps algébriquement clos. Une K-algèbre est semisimple si et seulement si elle est séparable.*

DÉMONSTRATION. La suffisance suit de (2.3) et la nécessité de (2.2)(a), (2.4) et (VI.7.1). □

Nous montrons maintenant que la séparabilité d'une algèbre s'exprime aussi au moyen de la cohomologie de Hochschild. On retourne pour cela à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{j_0} A^e \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0.$$

On définit une application K-linéaire $k_0 : A \to A^e$ par $k_0(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$ (pour $a \in A$). On a déjà montré que $d_0 k_0 = 0$, de sorte que l'image de k_0 est dans L_0, et qu'en fait elle engendre L_0 (voir (1.7)).

LEMME 2.6. *Pour tout $(A-A)$-bimodule M, on a un isomorphisme fonctoriel de K-espaces vectoriels*

$$\begin{array}{rccc} & \varphi : \operatorname{Hom}_{A^e}(L_0, M) & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Der}(A, M) \\ \textit{défini par} & f & \mapsto & fk_0 \end{array}$$

(pour $f \in \operatorname{Hom}_{A^e}(L_0, M)$). Dans cet isomorphisme, les dérivations internes correspondent aux morphismes de la forme gj_0, où $g \in \operatorname{Hom}_{A^e}(L_0, M)$.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que pour tout $f \in \operatorname{Hom}_{A^e}(L_0, M)$, on a bien $fk_0 \in \operatorname{Der}(A, M)$. Il est clair que fk_0 est K-linéaire. En outre,

$$\begin{aligned} (fk_0)(ab) &= f(ab \otimes 1 - 1 \otimes ab) \\ &= f(ab \otimes 1 - a \otimes b) + f(a \otimes b - 1 \otimes ab) \\ &= f(a(b \otimes 1 - 1 \otimes b)) + f((a \otimes 1 - 1 \otimes a)b) \\ &= a(fk_0)(b) + (fk_0)(a)b \end{aligned}$$

(pour tous $a, b \in A$) puisque f est A^e-linéaire. Cela montre que φ applique $\operatorname{Hom}_{A^e}(L, M)$ dans $\operatorname{Der}(A, M)$. Il est clair que φ est K-linéaire. Elle est aussi injective: si $fk_0 = 0$, alors $f = 0$, puisque $\operatorname{Im} k_0$ engendre L_0 (par (1.7)). Montrons que φ est surjective. Soit $\delta : A \to M$ une dérivation. On définit $g : A^e \to M$ comme étant l'application K-linéaire donnée par

$$g(a \otimes b) = \delta(a)b$$

(pour $a, b \in A$). Posons $f = gj_0$. Alors f est une application K-liuéaire de L_0 dans M telle que, pour $\sum a_i \otimes b_i \in L_0$ et $a, b \in A$, on a $\sum a_i b_i = 0$ et donc

$$\begin{aligned} f((\sum a_i \otimes b_i)(a \otimes b)) &= f(\sum aa_i \otimes b_i b) \\ &= \sum \delta(aa_i) b_i b \\ &= \sum a\delta(a_i) b_i b + \sum \delta(a) a_i b_i b \\ &= a(\sum \delta(a_i) b_i) b + \delta(a)(\sum a_i b_i) b \\ &= a(\sum \delta(a_i) b_i) b \\ &= af(\sum a_i \otimes b_i) b \\ &= f(\sum a_i \otimes b_i)(a \otimes b). \end{aligned}$$

Cela montre que $f = gj_0 : L_0 \to M$ est A^e-linéaire. Enfin, si $a \in A$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(f)(a) &= (fk_0)(a) = f(a \otimes 1 - 1 \otimes a) \\ &= f(a \otimes 1) - f(1 \otimes a) = \delta(a) \cdot 1 - \delta(1)a \\ &= \delta(a) \end{aligned}$$

puisque $\delta(1) = 0$ pour toute dérivation δ. Cela montre que $\varphi(f) = \delta$ et donc φ est surjective (et par conséquent est un isomorphisme).

Soient maintenant $f : L_0 \to M$ une application A^e-linéaire et $x \in M$, alors $\varphi(f) = fk_0$ est égale à la dérivation interne $a \mapsto ax - xa$ (pour $a \in A$) définie par x si et seulement si, pour tout $a \in A$,

$$\begin{aligned} fk_0(a) &= f(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = ax - xa \\ &= \sigma_x(a \otimes 1 - 1 \otimes a) = \sigma_x k_0(a) \end{aligned}$$

où $\sigma_x : A^e \to M$ est la multiplication à gauche par x (c'est-à-dire $\sigma_x(y) = xy$ pour tout $y \in A^e$). Comme L_0 est engendré par $\operatorname{Im} k_0$, on en déduit que $fk_0 \in \operatorname{IDer}(A, M)$ si et seulement s'il existe $x \in M$ tel que $f = \sigma_x j_0$. Cela prouve l'énoncé, puisqu'il suit de (II.5.4) que $\operatorname{Hom}_{A^e}(A^e, M) = \{\sigma_x \mid x \in M\}$. $\square$

Il est important de remarquer que le lemme précédent ainsi d'ailleurs que (1.7) sont valides même si K n'est pas un corps. Nous utiliserons cette remarque au chapitre suivant.

THÉORÈME 2.7. *Une K-algèbre A est séparable si et seulement si $H^1(A, M) = 0$ pour tout A-bimodule M (c'est-à-dire si et seulement si toute dérivation sur A est interne).*

DÉMONSTRATION. En effet, A est séparable si et seulement si la suite exacte courte de $(A - A)$-bimodules

$$0 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{j_0} A^e \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

est scindée, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un morphisme de $(A - A)$-bimodules $p : A^e \to L_0$ tel que $pj_0 = 1_{L_0}$. Supposons qu'il existe un tel morphisme p et soit, pour un $(A - A)$-bimodule quelconque M, un morphisme de $(A - A)$-bimodules $f : L_0 \to M$. Alors $f = fpj_0$. Cela montre, d'après le lemme, que $\operatorname{Der}(A, M) = \operatorname{IDer}(A, M)$ et donc que $H^1(A, M) = 0$. Réciproquement, $H^1(A, L_0) = 0$ donne, d'après (1.4), que $\operatorname{Der}(A, L_0) = \operatorname{IDer}(A, L_0)$ et donc, d'après le lemme, que tout morphisme de $(A - A)$-bimodules $L_o \to L_0$ (en particulier l'identité) est de la forme gj_0, où $g : A^e \to L_0$ est un morphisme de $(A - A)$-bimodules. Cela entraîne l'énoncé. $\square$

COROLLAIRE 2.8. *Soit A une K-algèbre séparable. Alors $H^n(A, M) = 0$ pour tout $n \geq 1$. En particulier, toute extension de A est scindée.*

DÉMONSTRATION. Le premier énoncé suit de ce que $H^1(A, M) = 0$, de ce que $H^n(A, M) = \operatorname{Ext}^n_{A^e}(A, M)$ et de (X.1.2). Le deuxième énoncé suit de ce que $H^2(A, M) = 0$ et de (1.6). $\square$

Nous arrivons à notre résultat principal, connu sons le nom de Théorème Principal de Wedderburn.

THÉORÈME 2.9. *Soient B une K-algèbre de dimension finie, et I un idéal nilpotent de B tel que B/I est séparable. Il existe une sous-algèbre A de B telle que l'on a un isomorphisme de K-espaces vectoriels*

$$B \xrightarrow{\sim} A \oplus I.$$

DÉMONSTRATION. Si $I^2 = 0$, cela suit de (1.6) car $H^2(B/I, I) = 0$ par (2.8). On peut donc supposer $I^2 \neq 0$ et utiliser la récurrence sur la dimension de B. On a $\dim_K(B/I^2) < \dim_K B$ et en outre $(B/I^2)/(I/I^2) \xrightarrow{\sim} B/I$ est séparable. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une sous-algèbre C de B telle que $C \supseteq I^2$, $B = C + I$ et $C \cap I = I^2$. Or $C/I^2 = C/(C \cap I) \xrightarrow{\sim} (C + I)/I = B/I$ est séparable. Comme I est un idéal nilpotent, on a $I \neq I^2$ donc $C \neq B$ de sorte que $\dim_K C < \dim_K B$. On peut donc encore appliquer l'hypothèse de récurrence et trouver une sous-algèbre A de C (donc de B) telle que $C = A \oplus I^2$. On a alors $B = C + I = A + I^2 + I = A + I$ et $A \cap I = A \cap C \cap I = A \cap I^2 = 0$. □

COROLLAIRE 2.10. *Soient K un corps algébriquement clos et B une K-algèbre de dimension finie. Il existe une sous-algèbre A de B telle que l'on a un isomorphisme de K-espaces vectoriels*

$$B \xrightarrow{\sim} A \oplus \operatorname{rad} B.$$

DÉMONSTRATION. En effet, $\operatorname{rad} B$ est un idéal nilpotent et $B/\operatorname{rad} B$ une K-algèbre semisimple (VII.4.8). On applique (2.5) et le théorème. □

L'énoncé du corollaire est en fait vrai pour tout corps parfait. Nous avons à dessein évité de nous pencher sur les relations entre la théorie des corps commutatifs et celle des algèbres séparables. Nous renvoyons pour cela le lecteur à d'autres manuels.

Exercices du Chapitre XI.

1. Soient A, B deux K-algèbres. Montrer qu'il existe une équivalence entre les catégories de $(A - B)$-bimodules et de $A^{\mathrm{op}} \otimes_K B$-modules à droite.

2. Soient A, B deux K-algèbres. Montrer que $(A \otimes_K B)^e \xrightarrow{\sim} A^e \otimes_K B^e$.

3. Soient G un groupe fini et $A = KG$. Montrer que $A^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\sim} A$ et que $A^e \xrightarrow{\sim} K(G \times G)$.

4. Montrer en détail que les résultats de la section 1 demeurent valides si on suppose K un anneau commutatif et A une K-algèbre projective en tant que K-module.

5. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ nn ensemble complet d'idempotents promitifs orthogonaux pour la K-algèbre A. Donner un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux pour A^e. En déduire la description des A^e-modules indécomposables projectifs et injectifs.

6. Soient A une K-algèbre de dimension finie et M un $(A - A)$-bimodule qui est de dimension finie sur K. Montrer que $DH_n(A, M) \xrightarrow{\sim} H^n(A, DM)$, où $D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ désigne la dualité standard entre $\mathrm{mod}\, A$ et $\mathrm{mod}\, A^{\mathrm{op}}$.

7. Soient A une K-algèbre de dimension finie et $d_0 : A \otimes_K A \to A$ la multiplication. Montrer que si $x \in A^e$ satisfait $d_0(x) = 1$, alors x est un idempotent de séparabilité pour A si et seulement si $x \cdot \mathrm{Ker}\, d_o = 0$.

8. Soit x un idempotent de séparabilité pour la K-algèbre de dimension finie A. Montrer que:

a) $x^2 = x$.

b) $A^e = (1-x)A^e \oplus xA^e$, avec $(1-x)A^e$ égal au noyau de la multiplication $A \otimes_K A \to A$ et $xA^e \xrightarrow{\sim} A$ en tant que A^e-modnles.

9. Montrer que si on suppose que K est un anneau commutatif et A une K-algèbre projective en tant que K-module, alors A est séparable si et seulement si $H^1(A, M) = 0$ pour tout $(A - A)$-bimodule M.

10. Soient $\pi : B \to A$ une extension de A et σ une section K-linéaire de π telle que $\sigma(a_1 a_2) = \sigma(a_1)\sigma(a_2)$ pour tous $a_1, a_2 \in A$. On veut montrer que $\sigma(1) = 1$. Montrer d'abord que, si f est l'ensemble des facteurs associé à σ, alors $f(1,1) = 0$. En déduire que $f(a,1) = f(1,a) = 0$ pour tout $a \in A$. Montrer ensuite que $\sigma(1) = 1$.

CHAPITRE XII

Algèbres héréditaires, tensorielles et auto-injectives.

Il est naturel d'essayer de caractériser certaines classes d'algèbres par leurs propriétés homologiques. On connaît déjà un tel exemple: on a en effet prouvé qu'une algèbre est semisimple si et seulement si sa dimension globale est nulle. L'étape suivante est évidemment l'étude des algèbres de dimension globale (à droite) égale à 1. Ces algèbres sont dites héréditaires et leur étude est l'objet de la première section de ce chapitre. On donnera ensuite un calcul de la dimension globale d'une algèbre tensorielle, d'où on déduira un résnltat donnant la dimension globale d'une algèbre de polynômes. On terminera ce chapitre avec la considération d'une classe d'algèbres de dimension globale infinie, à savoir la classe des algèbres auto-injectives, qui contient entre autres la classe des algèbres de groupes finis.

1. Algèbres héréditaires.

L'objectif de cette section est de caractériser les algèbres de dimension globale (à droite) égale à 1.

DÉFINITION. Une K-algèbre A est dite *héréditaire à droite* (ou à gauche) si tout idéal à droite (ou à gauche, respectivement) est projectif en tant que A-module.

EXEMPLES 1.1. (a) Soit A une K-algèbre semisimple. Tout A-module à droite (ou à gauche) étant projectif, c'est le cas pour tout idéal à droite (ou à gauche, respectivement). Par conséquent, A est héréditaire à droite et à gauche.

(b) Soit A un domaine d'intégrité principal, alors A est héréditaire (à droite et aussi à gauche, étant commutatif): en effet, tout idéal non nul de A est principal, donc de la forme aA pour un $a \in A$, un tel idéal est projectif puisqu'isomorphe à A (en tant que A-module), un isomorphisme évident étant l'application linéaire $A \to aA$ définie par $x \mapsto ax$ (pour $x \in A$). Par exemple, $\mathbb{Z}$ est une $\mathbb{Z}$-algèbre héréditaire.

(c) La $\mathbb{Z}$-algèbre $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{bmatrix}$ est héréditaire à droite mais pas à gauche.

Le théorème suivant, dû à Kaplansky, est fondamental.

THÉORÈME 1.2. *Soit A une K-algèbre héréditaire à droite. Tout sous-module d'un module libre est isomorphe à une somme directe d'idéaux à droite.*

DÉMONSTRATION. Soit L un A-module libre de base $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ où l'ensemble Λ peut, sans perte de généralité, être supposé bien ordonné. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, posons $L_\lambda = \bigoplus_{\mu<\lambda}(e_\mu A)$. Alors $L_0 = 0$ et $L_{\lambda+1} = \bigoplus_{\mu\leq\lambda}(e_\mu A) = L_\lambda \oplus (e_\lambda A)$. Soit maintenant M un sous-module de L. Chaque $x \in M \cap L_{\lambda+1}$ s'écrit uniquement sous la forme

$$x = y + e_\lambda a$$

(pour $y \in L_\lambda$ et $a \in A$). On peut donc définir une application A-linéaire $f_\lambda : M \cap L_{\lambda+1} \to A$ par $x \mapsto a$. Si on pose $J_\lambda = \operatorname{Im} f_\lambda$, on voit de suite que J_λ est un idéal à droite de A et qu'on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \cap L_\lambda \longrightarrow M \cap L_{\lambda+1} \xrightarrow{f_\lambda} J_\lambda \longrightarrow 0.$$

Comme A est héréditaire, l'idéal à droite J_λ est projectif et la suite précédente est scindée. Par conséquent, il existe un sous-module N_λ de $M \cap L_{\lambda+1}$ isomorphe à J_λ et tel que

$$M \cap L_{\lambda+1} = (M \cap L_\lambda) \oplus N_\lambda.$$

On affirme que $M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. Cela montrerait que M est isomorphe à la somme directe de la famille $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'idéaux à droite de A, et achèverait la démonstration.

Pour commencer, montrons que M est égal à son sous-module $N = \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. Comme L est égal à la réunion de la chaîne croissante de sous-modules $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, chaque $x \in L$ appartient à au moins un des L_λ. Posons, pour un $x \in L$,

$$\mu_x = \inf\{\lambda \in \Lambda \mid x \in L_{\lambda+1}\}.$$

Si $N \subsetneq M$, il existe $x \in M$ tel que $x \notin N$. On prend

$$\mu = \inf\{\mu_x \mid x \in M,\ x \notin N\},$$

et on choisit $y \in M$, $y \notin N$ tel que $\mu = \mu_y$. On a $y \in M \cap L_{\mu+1}$, donc y s'écrit sous la forme

$$y = u + v$$

avec $y \in M \cap L_\mu$ et $v \in N_\mu$. Par conséquent, $u = y - v \in M$ et $u \notin N$ (car sinon $y \in N$). Mais d'autre part, $u \in M \cap L_\mu$ doune $\mu_u < \mu$, ce qui contredit la minimalité de μ. Cette contradiction montre que l'on a bien $N = M$.

Il reste à montrer que la somme $N = \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ est directe. Supposons ainsi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ avec $x_i \in N_{\lambda_i}$, où l'on peut supposer $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Alors

$$x_1 + \cdots + x_{n-1} = -x_n \in (M \cap L_{\lambda_n}) \cap N_{\lambda_n} = 0$$

donc $x_n = 0$. Par récurrence, on a $x_i = 0$ pour tout i. $\square$

COROLLAIRE 1.3. *Soit A une K-algèbre héréditaire à droite. Tout sous-module d'un module projectif est projectif.*

DÉMONSTRATION. Tout A-module projectif P est, par (IV.2.4), un facteur direct, donc un sous-module, d'un module libre L. Par conséquent, tout sous-module M de P est un sous-module de L, donc est isomorphe à une somme directe d'idéaux, par le théorème précédent. Comme chacun de ces derniers est projectif, il en est de même de M, par (IV.2.3). □

COROLLAIRE 1.4. *Soit A un domaine d'intégrité principal. Tout sous-module M d'un module libre L est lui-même libre.*

DÉMONSTRATION. On sait que tout idéal non nul de A est isomorphe à A_A (voir l'exemple (1.1)(b) plus haut). Soit donc $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de L. Il suit de (1.2) qu'il existe une famille $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'idéaux de A telle que $M \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda$. Or on a, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, que $J_\lambda = 0$ ou bien $J_\lambda \xrightarrow{\sim} A_A$. L'énoncé s'ensuit. □

COROLLAIRE 1.5. *Soit A un domaine d'intégrité principal. Tout A-module projectif est libre.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que, par (IV.2.4), tout A-module projectif est un sous-module d'un module libre, et d'appliquer (1.4). □

Les considérations précédentes s'appliquent à $\mathbb{Z}$.

COROLLAIRE 1.6. (a) *Tout groupe abélien projectif est libre.*
(b) *Tout sous-groupe d'un groupe abélien libre est libre.* □

Nous arrivons à la caractérisation cherchée des algèbres héréditaires à droite.

THÉORÈME 1.7. *Soit A une K-algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est héréditaire (à droite).*
(b) $\dim.\mathrm{gl.d.}\, A \leq 1$.
(c) *Tout sous-module d'un A-module projectif est projectif.*
(d) *Tout quotient d'un A-module injectif est injectif.*

DÉMONSTRATION. (a) équivaut à (c). En effet, il suit de (1.3) que, pour une algèbre héréditaire A, tout sous-module d'un A-module projectif est projectif. Réciproquement, si cette dernière condition est satisfaite, tout sous-module de A_A, c'est-à-dire tout idéal à droite de A, est projectif.

(b) équivaut à (c). En effet, supposons $\dim.\mathrm{gl.d.}\, A \leq 1$ et soit M un sous-module du module projectif P, alors dans la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow P/M \longrightarrow 0$$

on sait que $\mathrm{dp}(P/M) \leq 1$. Par (X.1.2), M est projectif. Réciproquement, supposons que tout sous-module d'un A-module projectif est projectif. Soit N un A-module arbitraire. Il existe un A-module projectif P et un épimorphisme

$f : P \to N$. Alors $\operatorname{Ker} f$, étant un sous-module de P, est projectif, et la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow P \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

est une résolution projective de N. Donc $\operatorname{dp} N \leq 1$ et par conséquent dim. gl. d. $A \leq 1$.

(b) équivaut à (d). La démonstration est analogue, en remplaçant projectifs par injectifs. □

Par exemple, soient K un corps et $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$. On a vu que dim. gl. d. $A = 1$. Donc A est héréditaire à droite.

Encore une fois, les cas artinien et noethérien méritent une attention particulière. Comme on pouvait s'y attendre, les modules de type fini jouent un rôle spécial.

PROPOSITION 1.8. *Soit A une K-algèbre noethérienne à droite. Alors A est héréditaire à droite si et seulement si tout sous-module d'un A-module projectif de type fini est projectif.*

DÉMONSTRATION. La nécessité étant évidente, montrons la suffisance. Soit I_A un idéal à droite de A. Alors I_A est un sous-module de A_A, et est de type fini (car A est noethérienne) donc est projectif. □

C'est en particulier le cas si A est artinienne à droite, mais alors le résultat suivant est plus utile.

THÉORÈME 1.9. *Une K-algèbre artinienne à droite A est héréditaire à droite si et seulement si le radical de tout A-module projectif indécomposable de type fini est projectif.*

DÉMONSTRATION. La nécessité suivant de (1.8), prouvons la suffisance. Soit P_A un module projectif de type fini. Par (1.8), il suffit de montrer que tout sous-module M de P est projectif. On procède par récurrence sur la longueur ℓ de P (laquelle, par (VII.4.12), est finie). Si $\ell = 1$, alors P est simple et il n'y a rien à prouver. Supposons $\ell > 1$ et que l'énoncé est vrai pour tout projectif de type fini et de longueur $< \ell$. Le module P admet certainement une décomposition directe de la forme

$$P = P_1 \oplus P_2$$

avec P_1 indécomposable, et P_2 pouvant être nul. Soit $p : P \to P_1$ la projection canonique. On considère l'image $p(M)$ du sous-module M. On a deux cas. Si $p(M) = P_1$, la composition $pj : M \to P_1$ de l'inclusion $j : M \to P$ avec p est un épimorphisme, donc une rétraction, puisque P_1 est projectif. On a donc

$$M \xrightarrow{\sim} P_1 \oplus M'$$

où $M' = M \cap P_2 \subseteq P_2$. Comme $\ell(P_2) < \ell$, alors M' est projectif par l'hypothèse de récurrence. Donc $M \xrightarrow{\sim} P_1 \oplus M'$ est aussi projectif. Si $p(M) \neq P_1$, alors $M \subseteq \operatorname{rad} P_1 \oplus P_2$, où $\operatorname{rad} P_1$ est projectif par hypothèse. Comme P_1 est indécomposable, $\operatorname{rad} P_1$ est un sous-module maximal de P_1, de sorte que $\ell(\operatorname{rad} P_1 \oplus P_2) = \ell - 1 < \ell$. L'hypothèse de récurrence entraîne alors que M est projectif. □

Par exemple, soient K un corps et $A = \left[\begin{smallmatrix} K & 0 \\ K & K \end{smallmatrix}\right]$. Les A-modules projectifs indécomposables sont $\mathrm{e}_{11}A$ et $\mathrm{e}_{22}A$. Le premier est simple (donc de radical nul) tandis que le second est de radical $\mathrm{e}_{22}J \xrightarrow{\sim} \mathrm{e}_{11}A$ (un isomorphisme $\mathrm{e}_{11}A \to \mathrm{e}_{22}J$ étant fourni par $\mathrm{e}_{11}a \mapsto \mathrm{e}_{21}\mathrm{e}_{11}a = \mathrm{e}_{21}a$ (pour $a \in A$)), comme on l'a montré en (VIII.1), de sorte que le radical de chaque module projectif indécomposable de type fini est projectif.

COROLLAIRE 1.10. *Une K-algèbre artinienne à droite est héréditaire à droite si et seulement si* $\mathrm{rad}\, A_A$ *est un A-module projectif.*

DÉMONSTRATION. En effet, écrivons $A = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, où les P_i forment nne liste complète des A-modules projectifs indécomposables. Alors, par (VII.1.4), $\mathrm{rad}\, A_A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{rad}\, P_i$ et cette somme directe est projective, par (IV.2.3), si et seulement si $\mathrm{rad}\, P_i$ est projectif pour chaque i, où $1 \leq i \leq n$. Il ne reste plus qu'à appliquer (1.9). □

COROLLAIRE 1.11. *Soit A une algèbre artinienne à droite et héréditaire à droite. Tout morphisme non nul entre modules projectifs indécomposables est un monomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Soit $f : P \to P'$ un tel morphisme. Alors $\mathrm{Im}\, f \subseteq P'$ est projectif, donc la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{Im}\, f \longrightarrow 0$$

est scindée et $P \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$. Comme $f \neq 0$, alors $\mathrm{Im}\, f \neq 0$. Par hypothèse, P est indécomposable, donc $\mathrm{Ker}\, f = 0$. □

2. Algèbres tensorielles.

L'objectif de cette section est de calculer la dimension globale d'une algèbre tensorielle. Nous commençons par des considérations sur les foncteurs de changement des scalaires (introduits en (III.6)).

Soient A, B deux K-algèbres et $\varphi : A \to B$ un morphisme. On sait que tout B-module X_B est muni d'une structure canonique de A-module par

$$xa = x\varphi(a)$$

(pour $x \in X$ et $a \in A$). Cela permet de définir un foncteur $F : \mathrm{Mod}\, B \to \mathrm{Mod}\, A$ (qui peut être considéré comme une variante du foncteur oubli). Il est évident que F est un foncteur exact. On notera FX simplement X_A, si aucune ambiguïté n'est à craindre. Par exemple, B lui-même est muni d'une structure canonique de A-module, de sorte que l'on peut le considérer comme un $(B-A)$-bimodule qui sera noté ${}_BB_A$. De même, B admet également une structure de A-module à gauche, de sorte que l'on peut aussi le considérer comme un $(A-B)$-bimodule qui sera noté ${}_AB_B$. Le lemme suivant n'est autre que la première partie de l'exercice (V.26).

LEMME 2.1. *Pour tout B-module X, on a des isomorphismes fonctoriels*

$$FX \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B({}_AB_B, X) \xrightarrow{\sim} X \otimes_B B_A.$$

DÉMONSTRATION. Pour le premier isomorphisme, il suffit de prouver que l'isomorphisme fonctoriel K-linéaire $\psi : X \to \mathrm{Hom}_B(B, X)$ de (II.5.3) est A-linéaire. On rappelle que $\psi(x)(b) = xb$ pour $x \in X$ et $b \in B$. Soit donc $a \in A$, on a bien

$$\psi(xa)(b) = \psi(x\varphi(a))(b) = (x\varphi(a))b$$

et

$$[\psi(x)a](b) = \psi(x)(ab) = \psi(x)(\varphi(a)b).$$

On démontre de même le second isomorphisme. □

Comme le foncteur $F : \mathrm{Mod}\, B \to \mathrm{Mod}\, A$ s'exprime en termes de module d'homomorphismes, ou encore de produit tensoriel, il est naturel de considérer ses adjoints à droite et à gauche.

LEMME 2.2. (a) *Le foncteur* $-\otimes_A B_B : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, B$ *est adjoint à gauche de* F.

(b) *Le foncteur* $\mathrm{Hom}_A({}_BB_A, -) : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, B$ *est adjoint à droite de* F.

DÉMONSTRATION. Soient X_B un B-module et U_A un A-module. L'énoncé (a) suit des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Hom}_A(U, FX) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(U, \mathrm{Hom}_B({}_AB_B, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(U \otimes_A B_B, X)$$

tandis que (b) suit des isomorphismes fonctoriels

$$\mathrm{Hom}_A(FX, U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(X \otimes_B B_A, U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(X, \mathrm{Hom}_A({}_BB_A, U))$$

où l'on a utilisé successivement les deux isomorphismes de (2.1). □

Il est remarquable que les foncteurs adjoints de F définis en (2.2) préservent les projectifs et les injectifs, respectivement (voir les exercices (V.20) et (V.21)).

LEMME 2.3. (a) *Soit P_A un A-module projectif, alors $P \otimes_B B_A$ est un B-module projectif.*

(b) *Soit I_A un A-module injectif, alors* $\mathrm{Hom}_A({}_BB_A, I)$ *est un B-module injectif.*

DÉMONSTRATION. (a) On doit prouver que le foncteur $\mathrm{Hom}_B(P \otimes_B B_A, -)$ est exact, mais cela suit de l'isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_B(P \otimes_B B_A, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(P, F(-))$$

de (2.2)(a), et du fait que les foncteurs F et $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ sont exacts.

(b) se démontre de même au moyen de l'isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}_B(-, \mathrm{Hom}_A({}_BB_A, I)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(F(-), I_A)$$

de (2.2)(b). □

Il existe plusieurs formules permettant de calculer les relations entre modules d'extension et de torsion sur A et sur B. Nous aurons besoin ici des suivantes.

PROPOSITION 2.4. (a) *Si B_A est un A-module projectif, il existe pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}_B^n(X, \mathrm{Hom}_A({}_BB_A, U)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^n(X, U)$$

fonctoriel en X_B et U_A.

(b) *Si ${}_AB$ est un A-module plat, il existe pour tout $n \geq 0$ un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}_B^n(U \otimes_A B_B, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_A^n(U, X)$$

fonctoriel en U_A et X_B.

DÉMONSTRATION. (a) Soit $0 \longrightarrow U \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$ une résolution injective de U_A dans $\mathrm{Mod}\, A$. On applique $\mathrm{Hom}_A({}_BB_A, -)$. Comme B_A est projectif, ce foncteur est exact de sorte que l'on obtient une suite exacte de $\mathrm{Mod}\, B$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_BB_A, U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_BB_A, I^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_BB_A, I^1) \longrightarrow \cdots .$$

Il suit de (2.3) que c'est là une résolution injective de $\mathrm{Hom}_A({}_BB_A, U)$. Si on supprime ce terme et on applique $\mathrm{Hom}_B(X, -)$ au complexe résultant, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}_B(X, \mathrm{Hom}_A({}_BB_A, I^0)) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_B(X, \mathrm{Hom}_A({}_BB_A, I^1)) & \rightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\
0 & \rightarrow & \mathrm{Hom}_A(FX, I^0) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_A(FX, I^1) & \rightarrow & \cdots
\end{array}$$

où les lignes sont des complexes. L'isomorphisme cherché vient en prenant les cohomologies de ces deux complexes.

(b) La démonstration est semblable. Soit $\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow U \longrightarrow 0$ une résolution projective de U_A dans $\mathrm{Mod}\, A$. On applique $- \otimes_A B_B$. Comme ${}_AB$ est plat, ce foncteur est exact de sorte que l'on obtient une suite exacte de $\mathrm{Mod}\, B$:

$$\cdots \longrightarrow P_1 \otimes_A B_B \longrightarrow P_0 \otimes_A B_B \longrightarrow U \otimes_A B_B \longrightarrow 0.$$

Il suit de (2.3) que c'est là une résolution projective de $U \otimes_A B_B$. Si on supprime ce terme et on applique $\mathrm{Hom}_B(-, X)$ au complexe résultant, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(P_0 \otimes_A B_B, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(P_1 \otimes_A {}_AB_B, X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(P_0, FX) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(P_1, FX) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

où les lignes sont des complexes. L'isomorphisme cherché vient en prenant les cohomologies de ces deux complexes. □

Dans ce qui suit, on considère un K-module M et l'algèbre tensorielle $A = T(M)$ de M (voir (V.4)). Notre prochain lemme donne un calcul plus fin du noyau de la multiplication $d_0 : A \otimes_K A \to A$ définie par $a \otimes b \mapsto ab$ (pour $a, b \in A$). On rappelle en effet que l'on a montré en (XI.1.7) que ce noyau est, en tant que $(A - A)$-bimodule, engendré par les éléments de la forme $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ (pour $a \in A$). On avait déjà observé que ce calcul, ainsi que (XI.2.6), faits sous l'hypothèse que K est un corps et A une K-algèbre de dimension finie sont en fait valides pour tout anneau commntatif K et toute K-algèbre A.

LEMME 2.5. *Soient M un K-module et $A = T(M)$ son algèbre tensorielle. Il existe une suite exacte courte de $(A - A)$-bimodules qui est scindée en tant que suite exacte de A-modules à droite (ou à gauche)*

$$0 \longrightarrow A \otimes_K M \otimes_K A \xrightarrow{f_0} A \otimes_K A \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION. On a vu que la multiplication $d_0 : A \otimes_K A \to A$ définie par $a \otimes b \mapsto ab$ (pour $a, b \in A$) est un morphisme surjectif de $(A - A)$-bimodules. L'application K-linéaire $k_0 : A \to \operatorname{Ker} d_0$ définie par $k_0(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a$ (pour $a \in A$) est, d'après (XI.2.6), une dérivation et en outre $\operatorname{Ker} d_0$ est engendré par $\operatorname{Im} k_0$. On considère la restriction de k_0 à M, notée $k_M = k_0 \mid_M$ (c'est-à-dire la composition de l'inclusion canonique de M dans A avec k_0). Comme A est engendré par M en tant que K-algèbre, $\operatorname{Ker} d_0$ est engendré par l'image de k_M. Cette restriction induit un morphisme de $(A - A)$-bimodules

$$f_0 : A \otimes_K M \otimes_K A \longrightarrow \operatorname{Ker} d_0 \longrightarrow A \otimes_K A$$

(où l'application $\operatorname{Ker} d_0 \to A \otimes_K A$ est l'inclusion) par

$$f_0(1 \otimes x \otimes 1) = k_M(x) = x \otimes 1 - 1 \otimes x$$

(pour $x \in M$), et $f_0(a \otimes x \otimes b) = af_0(1 \otimes x \otimes 1)b$ (pour $x \in M$ et $a, b \in A$). Il est clair que $\operatorname{Im} f_0 = \operatorname{Im} k_M = \operatorname{Ker} d_0$. Cela montre que la suite donnée est exacte à droite. Il reste à prouver que f_0 est injectif et est une section de A-modules à droite (ou à gauche). Il suffit donc de construire un morphisme de A-modules à droite $g_0 : A \otimes_K A \to A \otimes_K M \otimes_K A$ tel que $g_0 f_0 = 1$ (une construction semblable donnant un morphisme de A-modules à gauche avec la même propriété).

On considère le morphisme de K-modules $M \to A \otimes_K M \otimes_K A$ défini par $x \mapsto 1 \otimes x \otimes 1$ (pour $x \in M$). On affirme qu'il se prolonge en une dérivation $\delta : A \to A \otimes_K M \otimes_K A$. En effet, soit B l'algèbre de matrices

$$B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A \otimes_K M \otimes_K A & A \end{bmatrix}$$

munie de l'addition ordinaire des matrices et de la multiplication induite de la structure de $(A - A)$-bimodule de $A \otimes_K M \otimes_K A$. Il est clair que B est aussi un $(A - A)$-bimodule, et que le morphisme de K-modules donné se prolonge en un morphisme de K-modules $M \to B$ par

$$x \mapsto \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 \otimes x \otimes 1 & x \end{bmatrix}$$

(pour $x \in M$). Par définition de l'algèbre tensorielle $A = T(M)$, on en déduit un morphisme de K-algèbres $A \to B$, dont la composition avec l'application canonique $B \to A \otimes_K M \otimes_K A$ est une dérivation $\delta : M \to A \otimes_K M \otimes_K A$, comme on le vérifie aisément.

La dérivation δ induit une application A-linéaire $g_0 : A \otimes_K A \to A \otimes_K M \otimes_K A$ par $g_0(a \otimes b) = \delta(a)b$ pour $a, b \in A$ (voir démonstration de (XI.2.6)). On a

$$\begin{aligned} g_0 f_0(a \otimes x \otimes 1) &= g_0[a f_0(1 \otimes x \otimes 1)] \\ &= g_0[a(x \otimes 1 - 1 \otimes x)] \\ &= g_0(ax \otimes 1 - a \otimes x) \\ &= \delta(ax) - \delta(a)x \\ &= a\delta(x) \\ &= a(1 \otimes x \otimes 1) \\ &= a \otimes x \otimes 1 \end{aligned}$$

pour tous $a \in A$ et $x \in M$. Comme les éléments $a \otimes x \otimes 1$ engendrent $A \otimes_K M \otimes_K A$ en tant que A-module à droite, il s'ensuit que $g_0 f_0 = 1$. $\square$

Nous arrivons au résultat principal de cette section. Rappelons que tout anneau commutatif est une $\mathbb{Z}$-algèbre commutative et, qu'à ce titre, on peut parler de sa dimension globale.

THÉORÈME 2.6. *Soient K un anneau commutatif de dimension globale n, M un K-module et $A = T(M)$.*

(a) *Si M_K est projectif, alors $n \leq$ dim. gl. d. $A \leq n+1$ et dim. gl. d. $A = n+1$ si et seulement s'il existe un K-module Y tel que* $\operatorname{di}\operatorname{Hom}_K(M, Y) = n$.

(b) *Si M_K est plat, alors $n \leq$ dim. gl. d. $A \leq n+1$ et dim. gl. d. $A = n+1$ si et seulement s'il existe un K-module X tel que* $\operatorname{dp}(X \otimes_K M) = n$.

DÉMONSTRATION. (a) Soit V_A un A-module. On veut appliquer le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-, V)$ à la suite exacte scindée de (2.5). Observons d'abord qu'il suit de l'isomorphisme d'adjonction que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(A \otimes_K M \otimes_K A, V) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_K(A, \operatorname{Hom}_A(M \otimes_K A, V)) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_K(A, \operatorname{Hom}_K(M, \operatorname{Hom}_A(A, V)) \\ &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_K(A, \operatorname{Hom}_K(M, V)) \end{aligned}$$

et de même $\operatorname{Hom}_A(A \otimes_K A, V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_K(A, V)$. Par conséquent, le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-, V)$ appliqué à la suite de (2.5) donne une suite exacte courte de A-modules

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(A, V) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(A, \operatorname{Hom}_K(M, V)) \longrightarrow 0$$

(où on a utilisé (IV.1.5)). Soit U_A un A-module. Le foncteur $\operatorname{Hom}_A(U, -)$ appliqué à la suite précédente donne une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^k(U, V) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^k(U, \operatorname{Hom}_K(A, V)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^k(U, \operatorname{Hom}_K(A, \operatorname{Hom}_K(M, V)) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{k+1}(U, V) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Comme M_K est projectif, et que la projectivité est préservée par les puissances tensorielles (en effet, $M \otimes_K M$ est projectif car

$$\mathrm{Hom}_K(M \otimes_K M, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(M, \mathrm{Hom}_K(M, -))$$

est exact, on contiuue par récurrence) et les sommes directes, on en déduit qne A_K est projectif. Par (2.4)(a), la suite exacte précédente devient

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^k_A(U,V) \to \mathrm{Ext}^k_K(U,V) \to \mathrm{Ext}^k_K(U, \mathrm{Hom}_K(M,V)) \to \mathrm{Ext}^{k+1}_A(U,V) \to \cdots .$$

Il est alors évident que $\mathrm{dim.\,gl.\,d.}\, A \leq n+1$.

Comme $\mathrm{dim.\,gl.}\, K = n$, il existe des K-modules X et Y tels que $\mathrm{Ext}^n_K(X,Y) \neq 0$. On fait de X, Y des A-modules en définissant trivialement l'action de M, c'est-à-dire en posant $XM = YM = 0$, de sorte que le foncteur oubli rend à X et Y leurs structures naturelles de K-modules. Appliquons le foncteur $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ à la suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(A, \mathrm{Hom}_K(M,Y)) \longrightarrow 0.$$

Il en résulte, compte tenu de (2.4)(a), une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(X, \mathrm{Hom}_K(M,Y)).$$

Comme $\mathrm{Hom}_A(X,Y) = \mathrm{Hom}_K(X,Y)$ (par définition des structures de A-modules de X et Y), le morphisme $\mathrm{Hom}_K(X,Y) \to \mathrm{Hom}_K(X, \mathrm{Hom}_K(M,Y))$ est nul. Le même raisonnement appliqué aux termes d'une résolution projective de X donne que les morphismes $\mathrm{Ext}^k_K(X,Y) \to \mathrm{Ext}^k_K(X, \mathrm{Hom}_K(M,Y))$ sont nuls. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_K(X, \mathrm{Hom}_K(M,Y)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_K(X,Y) \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, $\mathrm{Ext}^n_A(X,Y) \neq 0$ d'où on tire $\mathrm{dim.\,gl.\,d.}\, A \geq n$.

Il existe un K-module Y tel que $\mathrm{di}\,\mathrm{Hom}_K(M,Y) = n$ si et seulement s'il existe un K-module X tel que $\mathrm{Ext}^n_K(X, \mathrm{Hom}_K(M,Y)) \neq 0$ (par (X.1.6)). Ceci et la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_K(X, \mathrm{Hom}_K(M,Y)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_A(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_K(X,Y) = 0$$

(où on a fait de X et Y des A-modules comme plus haut) impliquent que $\mathrm{Ext}^{n+1}_A(X,Y) \neq 0$ (et donc $\mathrm{dim.\,gl.\,d.}\, A = n+1$). Par contre, si $\mathrm{di}\,\mathrm{Hom}_K(M,Y) < n$ pour tout K-module Y, alors, pour tout A-module V, on a $\mathrm{di}\,\mathrm{Hom}_K(M,V) < n$ et donc la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^n_K(U, \mathrm{Hom}_K(M,V)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_A(U,V) \longrightarrow 0$$

implique que $\mathrm{Ext}^{n+1}_A(U,V) = 0$ pour tout A-module U et donc $\mathrm{di}\, V_A \leq n$ pour tout V, c'est-à-dire $\mathrm{dim.\,gl.\,d.}\, A \leq n$ par (X.2.1).

(b) La démonstration est semblable. Soit U_A un A-module. La suite exacte scindée de (2.5) induit, après application du foncteur $U \otimes_A -$, une suite exacte

$$0 \longrightarrow U \otimes_K M \otimes_K A \longrightarrow U \otimes_K A \longrightarrow U \longrightarrow 0$$

(par (V.2.5)). Soit V_A un A-module. Le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-,V)$ appliqué à la suite exacte précédente donne une suite exacte longue de cohomologie

$$\cdots \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^k(U,V) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^k(U\otimes_K A, V) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^k(U\otimes_K M\otimes_K A, V) \longrightarrow \\ \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{k+1}(U,V) \longrightarrow \cdots$$

Comme M_K est plat, et que la platitude est préservée par les puissances tensorielles et les sommes directes, on en déduit que A_K est plat. Par (2.4)(b), la suite exacte précédente devient

$$\cdots \to \operatorname{Ext}_A^k(U,V) \to \operatorname{Ext}_K^k(U,V) \to \operatorname{Ext}_K^k(U\otimes_K M, V) \to \operatorname{Ext}_A^{k+1}(U,V) \to \cdots .$$

Il est évident que $\operatorname{dim.gl.d.} A \leq n+1$.

Comme $\operatorname{dim.gl.d.} K = n$, il existe des K-modules X et Y tels que $\operatorname{Ext}_K^n(X,Y) \neq 0$. On en fait encore des A-modules en posant $XM = YM = 0$. Appliquons le foncteur $\operatorname{Hom}_A(-,Y)$ à la suite exacte de A-modules

$$0 \longrightarrow X\otimes_K M\otimes_K A \longrightarrow X\otimes_K A \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

Il en résulte, compte tenu de (2.4)(b), une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(X\otimes_K M, Y).$$

Comme $\operatorname{Hom}_A(X,Y) = \operatorname{Hom}_K(X,Y)$ (par définition des structures de A-modules de X et Y), le morphisme $\operatorname{Hom}_K(X,Y) \to \operatorname{Hom}_K(X\otimes_K M, Y)$ est nul. Le même raisonnement appliqué aux termes d'une résolution injective de Y donne que les morphismes $\operatorname{Ext}_K^k(X,Y) \to \operatorname{Ext}_K^k(X\otimes_K M, Y)$ sont nuls. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_K^{n-1}(X\otimes_K M, Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^n(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}_K^n(X,Y) \longrightarrow 0.$$

Par conséquent, $\operatorname{Ext}_A^n(X,Y) \neq 0$ d'où on tire $\operatorname{dim.gl.d.} A \geq n$.

Il existe un K-module X tel que $\operatorname{dp}(X\otimes_K M) = n$ si et seulement s'il existe un K-module Y tel que $\operatorname{Ext}_K^n(X\otimes_K M, Y) \neq 0$ (par (X.1.2)). Ceci et la suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_K^n(X\otimes_K M, Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{n+1}(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Ext}_K^{n+1}(X,Y) = 0$$

(où on a fait de X et Y des A-modules comme plus haut) impliquent que $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(X,Y) \neq 0$ (et donc $\operatorname{dim.gl.d.} A = n+1$). Par contre, si $\operatorname{dp}(X\otimes_K M) < n$ pour tout K-module X, alors, pour tout A-module U_A, on a $\operatorname{dp}(U\otimes_K M) < n$ et donc la suite exacte

$$\operatorname{Ext}_K^n(U\otimes_K M, V) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A^{n+1}(U,V) \longrightarrow 0$$

implique que $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(U,V) = 0$ pour tout A-module V. Donc $\operatorname{dp} U_A \leq n$ pour tout U, c'est-à-dire $\operatorname{dim.gl.d.} A \leq n$ par (X.2.1). □

COROLLAIRE 2.7. *Soient K un anneau commutatif, et t une indéterminée, alors* $\operatorname{dim.gl.} K[t] = 1 + \operatorname{dim.gl.} K$.

DÉMONSTRATION. En effet, si $M = K$, alors $A = T(M) \xrightarrow{\sim} K[t]$. D'autre part, le K-module K est libre, donc projectif et en outre, pour tout K-module Y, on a $\operatorname{Hom}_K(K,Y) \xrightarrow{\sim} Y_K$, d'où l'énoncé par application directe de (2.6)(a). □

COROLLAIRE 2.8. *Soient K un anneau commutatif, et $t_1, \dots, t_n$ des indéterminées, alors* $\operatorname{dim.gl.} K[t_1, \dots, t_n] = n + \operatorname{dim.gl.} K$. *Si, en particulier, K est un corps, alors* $\operatorname{dim.gl.} K[t_1, \dots, t_n] = n$

DÉMONSTRATION. Le premier énoncé suit de (2.7) et d'une récurrence évidente. Le second de ce que tout corps est semisimple et donc de dimension globale nulle. □

Les énoncés (2.7) et (2.8) sont connus sous le nom de *Théorème des syzygies de Hilbert*. Le terme "syzygies", qui vient du grec, est utilisé pour désigner les noyaux d'une résolution projective (un noyau d'une résolution injective étant désigné du nom de *cosyzygie*). Enfin, on déduit de (2.6) le calcul de la dimension globale d'une algèbre libre (III.3.8).

COROLLAIRE 2.9. *Soient K un anneau commutatif, et X un ensemble, alors* $\operatorname{dim.gl.d.} K\langle X\rangle = 1 + \operatorname{dim.gl.} K$. *Si, en particulier, K est un corps, alors $K\langle X\rangle$ est héréditaire à droite.*

DÉMONSTRATION. En effet, si $M = K^{(X)}$ est le K-module libre de base X, alors $T(M) \xrightarrow{\sim} K\langle X\rangle$ comme on l'a vu en (V.4). D'autre part, M étant libre, donc projectif, la dimension injective de $\operatorname{Hom}_K(M, Y)$ est égale à celle de Y_K, pour tout module Y. Cela montre le premier énoncé. Le second suit de (1.6). □

3. Algèbres auto-injectives.

La section 1 traitait des algèbres de dimension globale 1. L'autre extrême est celui des algèbres de dimension globale infinie. Nous en décrirons une sous-classe particulièrement importante, parce qu'elle comprend les algèbres de groupes finis.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre noethérienne à droite et à gauche. Alors A est dite *auto-injective à droite* ou QF (*quasi-frobéniusienne*) à droite si A_A est un A-module injectif.

On définit de même une algèbre auto-injective à gauche. Il y a évidemment identité entre les deux concepts quand l'algèbre en question est commutative. Nous montrerons plus bas que si A est de dimension finie sur un corps, alors ${}_AA$ est aussi un A-module injectif et donc A est aussi auto-injective à gauche. On voit de suite que toute algèbre semisimple est auto-injective (à droite et à gauche). Pour construire d'autres exemples, on utilisera le lemme suivant.

LEMME 3.1. *Soient A un domaine d'intégrité principal et I un idéal non nul. Alors A/I est auto-injective.*

DÉMONSTRATION. Il existe un $a \in A$, nécessairement non nul, tel que $I = aA$. On sait qu'un idéal de A/I est de la forme J/I, avec J un idéal de A contenant I. Soit $b \in A$ tel que $J = bA$. Comme $a \in I \subseteq J$, il existe $c \in A$ tel que $a = bc$. Soient $\overline{1} = 1 + I$ et $\overline{0} = 0 + I$ respectivement l'identité et l'élément nul de A/I, alors $b \cdot \overline{1}$ engendre J/I en tant que A/I-module. On considère le diagramme à ligne exacte

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & J/I & \xrightarrow{j} & A/I \\ & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \\ & & A/I & & \end{array}$$

où j est l'inclusion et f une application A/I-linéaire. Alors $f(b \cdot \overline{1}) = x \cdot \overline{1}$ pour un $x \in A$. Comme $cb \cdot \overline{1} = a \cdot \overline{1} = \overline{0}$, on a $cx \cdot \overline{1} = cf(b \cdot \overline{1}) = \overline{0}$. Par conséquent, $cx \in I = aA$ et il existe $y \in A$ tel que $cx = by$, ce qui donne $cx = cby$. Comme A est intègre, $x = by$ et donc $f(b \cdot \overline{1}) = by \cdot \overline{1}$. On définit une application $g : A/I \to A/I$ par $g(\overline{1}) = y \cdot \overline{1}$: il est clair que cela donne une application A/I-linéaire de A/I dans lui-même qui prolonge f. Donc A/I est injectif en tant que A/I-module par le critère de Baer (IV.3.4). Comme A/I est évidemment noethérienne, elle est auto-injective. $\square$

Par conséquent, $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est auto-injective pour tout $n > 0$, et, si K est un corps et t une indéterminée, $K[t]/\langle p \rangle$ est auto-injective pour tout polynôme non nul $p \in K[t]$.

THÉORÈME 3.2. *Soit A une K-algèbre noethérienne à droite et à gauche. Alors A est auto-injective (à droite) si et seulement si tout A-module (à droite) projectif est injectif.*

DÉMONSTRATION. La suffisance étant triviale, montrons la nécessité. Soient A une algèbre auto-injective et P_A un A-module projectif. Alors P_A est un facteur direct d'un module libre de base, disons, $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Comme on a $e_\lambda A \xrightarrow{\sim} A_A$ pour chaque λ, et par conséquent chaque $e_\lambda A$ est injectif, il suit de (VI.2.5) et du fait que A est noethérienne que $L \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda A$ est aussi injectif. Par conséquent, P_A, qui est facteur direct de L, est aussi injectif. $\square$

PROPOSITION 3.3. *Soit A une K-algèbre auto-injective et non semisimple. Pour tout A-module M non projectif, on a* $\operatorname{dp} M = \infty$. *Par conséquent,* $\operatorname{dim.gl.} A = \infty$.

DÉMONSTRATION. En effet, supposons que M est un A-module non projectif tel que $\operatorname{dp} M = n < \infty$, alors il existe une résolution projective de M de la forme

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Comme P_n est projectif, il est injectif et donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \operatorname{Coker} d_n \longrightarrow 0$$

est scindée, ce qui entraîne que $\operatorname{Coker} d_n$ est projectif et que

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} d_n \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

est une résolution projective de M de longueur $n - 1$, une contradiction à l'hypothèse que $\operatorname{dp} M = n$. $\square$

On considère maintenant le cas où K est un corps et A est une K-algèbre de dimension finie. Alors A est certainement une algèbre noethérienne à droite et à gauche. On rappelle que le foncteur $D = \mathrm{Hom}_K(-, K)$ induit une dualité entre A-modules à droite de type fini et A-modnles à gauche de type fini. Nous allons montrer que, dans ce cas, auto-injective à droite coïncide avec auto-injective à gauche.

THÉORÈME 3.4. *Soit A une K-algèbre de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est auto-injective à droite.*
(b) *A est auto-injective à gauche.*
(c) *$(DA)_A$ est un A-module projectif.*
(d) *${}_A(DA)$ est un A^{op}-module projectif.*
(e) *Tout A-module de type fini projectif est injectif.*
(f) *Tout A^{op}-module de type fini injectif est projectif.*
(g) *Tout A-module de type fini injectif est projectif.*
(h) *Tout A^{op}-module de type fini projectif est injectif.*

DÉMONSTRATION. En effet, A est auto-injective si et seulement si A_A est injectif, c'est-à-dire si et seulement si $D(A_A) = {}_A(DA)$ est projectif. On a montré l'équivalence de (a) et (d). Tout A^{op}-module injectif de type fini étant une somme directe finie de facteurs indécomposables de ${}_A(DA)$ (par (VIII.4.6)), on en déduit l'équivalence avec (h). Celle avec (e) a déjà été établie en (3.2). Dualement, (b) (c) (f) (g) sont équivalentes. Enfin, (e) et (f) sont équivalentes par dualité. □

Un cas particulier important est celui où $A_A \xrightarrow{\sim} D({}_AA)$.

DÉFINITION. Soit A une K-algèbre de dimension finie. On dit que A est *de Frobenius* (ou *frobéniusienne*) s'il existe un isomorphisme de A-modules à droite $A_A \xrightarrow{\sim} D({}_AA)$.

THÉORÈME 3.5. *Soit A une K-algèbre de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *A est une algèbre de Frobenius.*
(b) *Il existe une forme K-bilinéaire non-dégénérée $<,>: A \times A \to K$ telle que $< ab, c > = < a, bc >$ pour tous $a, b, c \in A$ (on dit alors que $<,>$ est* associative*).*
(c) *Il existe une forme K-linéaire $u \in DA$ dont le noyau ne contient aucun idéal à droite ou à gauche non nul.*

DÉMONSTRATION. (a) implique (b). Soit $f : A_A \to D({}_AA)$ un isomorphisme, alors, pour tous $a, b \in A$, on a

$$f(ba) = f(b)a.$$

Pour chaque $x \in A$, on a, par définition de la structure à droite sur $D({}_AA)$, que

$$f(ba)(x) = (f(b)a)(x) = f(b)(ax).$$

Cela conduit à définir $<,>: A \times A \to K$ par

$$< x, y >= f(x)(y)$$

où $x, y \in A$. Il est clair que $<,>$ est une forme bilinéaire. Elle est non-dégénérée, parce que f est un isomorphisme: en effet, $< A, y >= 0$ donne $y = 0$ (car toute forme linéaire appliquée à y donne zéro) tandis que $< x, A >= 0$ donne $f(x) = 0$ donc $x = 0$. L'associativité suit de

$$< x, yz >= f(x)(yz) = f(xy)(z) =< xy, z >$$

pour $x, y, z \in A$.

(b) implique (a). On définit $f : A \to DA$ par $f(x) =< x, - >$ (pour $x \in A$), c'est-à-dire que $f(x)(y) =< x, y >$ (pour $x, y \in A$). Alors f est un isomorphisme K-linéaire car $<,>$ est une forme bilinéaire non-dégénérée, et est A-linéaire car $<,>$ est associative.

(b) implique (c). Si $<,>$ est donnée, on définit une forme linéaire $u \in DA$ par

$$u(x) =< x, 1 >$$

pour $x \in A$. Alors $u(xA) = 0$ implique $< xA, 1 >= 0$ donc $< x, A >= 0$ et enfin $x = 0$ car $<,>$ est non-dégénérée. De même, $u(Ax) = 0$ implique $x = 0$. Par conséquent, $\operatorname{Ker} u$ ne contient pas d'idéaux à droite ou à gauche non nuls.

(c) implique (b). Si u est donnée, on définit $<,>: A \times A \to K$ par

$$< x, y >= u(xy)$$

(pour $x, y \in A$). Il ne reste plus qu'à vérifier que $<,>$ est bilinéaire, non-dégénérée et associative, ce qui est un exercice facile et laissé au lecteur. □

Un cas particulièrement intéressant est celui des algèbres auto-injectives qui sont réduites (voir (VIII.3)). Dans ce cas, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux, alors $A_A = \bigoplus_{i=1}^{n}(e_i A)$ et $\{e_1 A, \ldots, e_n A\}$ est un ensemble complet de A-modules projectifs indécomposables non-isomorphes (par (VIII.3.6)) tandis que $(DA)_A = \bigoplus_{i=1}^{n} D(Ae_i)$ et $\{D(Ae_1, \ldots, D(Ae_n)\}$ est un ensemble complet de A-modules injectifs indécomposables non-isomorphes (par (VIII.4.5)). Il suit de (3.4) qu'il existe une bijection $\nu : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ telle que $D(Ae_i) \xrightarrow{\sim} e_{\nu(i)}A$. Par conséquent, on a un isomorphisme

$$(DA)_A = \bigoplus_{i=1}^{n} D(Ae_i) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^{n} e_{\nu(i)}A = A_A$$

(car ν est bijective). On a prouvé que toute algèbre auto-injective réduite est de Frobenius. Par conséquent, une algèbre réduite est auto-injective si et seulement si elle est de Frobenius. En outre, si c'est le cas, il existe une permutatiou ν de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $e_{\nu(i)}A \xrightarrow{\sim} D(Ae_i)$ pour chaque i. Nous verrons que ν est en fait donnée par un automorphisme de A.

PROPOSITION 3.6. *Soient A une algèbre de Frobenius, et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux de A. Il existe un automorphisme $\nu : A \to A$ tel que $D(Ae_i) \xrightarrow{\sim} \nu(e_i)A$.*

DÉMONSTRATION. Soit $<,>: A \times A \to K$ une forme bilinéaire non-dégénérée et associative. On définit une application $\nu : A \to A$ par

$$< \nu a, - > = < -, a >$$

pour tout $a \in A$. Il est clair que ν est K-linéaire. En outre

$$\begin{aligned} < x, ab > &= < xa, b > = < \nu(b), xa > \\ &= < \nu(b)x, a > = < \nu(a), \nu(b)x > \\ &= < \nu(a)\nu(b), x > \end{aligned}$$

pour tous $a, b, x \in A$. Par conséquent, $\nu(ab) = \nu(a)\nu(b)$. Enfin,

$$\begin{aligned} < \nu(1), x > &= < x, 1 > = < 1 \cdot x, 1 > \\ &= < 1, x \cdot 1 > = < 1, x > \end{aligned}$$

pour tout $x \in A$ donne $\nu(1) = 1$. Comme ν est évidemment inversible, elle est effectivement un automorphisme de A.

Pour le deuxième énoncé, on remarque que $\{\nu(e_1), \ldots, \nu(e_n)\}$ est évidemment un ensemble complet d'idempotents primitifs orthogonaux. Par conséquent, pour chaque i, le module $\nu(e_i)A$ est un A-module indécomposable projectif de sorte qu'il existe j tel que $\nu(e_i)A \xrightarrow{\sim} e_jA$. Ainsi, ν induit une permutation sur $\{1, \ldots, n\}$.

Soit maintenant I_A un A-module indécomposable injectif. Par (3.4), il existe e_i tel que $I_A \xrightarrow{\sim} e_iA$. Soit S le socle (simple) de I. Alors $S = e_iS$: en effet, S étant (isomorphe à) un sous-module de e_iA, on a que tout $s \in S$ s'écrit $s = e_ia$ pour un $a \in A$, par conséquent $s = e_is$ et en particulier e_iS est un sous-module de S, donc est égal à ce dernier. En outre, S est un sous-module de A_A, donc un idéal à droite. Soit u la forme linéaire attachée à $<,>$ (voir (3.5)). Il existe $x \in S$ tel que

$$\begin{aligned} 0 \neq u(e_ix) &= < e_ix, 1 > = < e_i, x > \\ &= < x, \nu^{-1}(e_i) > = u(x\nu^{-1}(e_i)). \end{aligned}$$

Par conséquent, $S \cdot \nu^{-1}(e_i) \neq 0$. Mais cela entraîne que $\mathrm{Hom}_A(\nu^{-1}(e_i) \cdot A, S) \neq 0$ et donc la coiffe de $\nu^{-1}(e_i) \cdot A$ est isomorphe au socle S de e_iA. Par (VIII.4.7), on en déduit que $e_iA \xrightarrow{\sim} D(A \cdot \nu^{-1}(e_i))$. $\square$

L'automorphisme ν défini dans la proposition s'appelle *automorphisme de Nakayama*, la permutation ν de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $D(Ae_i) \xrightarrow{\sim} \nu(e_i) \cdot A$ s'appelle la *permutation de Nakayama* de A. Le lemme suivant (qui n'est autre que l'exercice (VIII.7)), valide pour toute algèbre, non nécessairement auto-injective, montre que la permutation de Nakayama est déterminée uniquement modulo un automorphisme intérieur de A.

LEMME 3.7. *Soient A une K-algèbre de dimension finie et $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ deux ensembles complets d'idempotents primitifs orthogonaux de A. Alors $m = n$ et il existe un $a \in A$ inversible tel que, à l'ordre près, on a $e'_i = ae_ia^{-1}$ pour chaque i.*

DÉMONSTRATION. On a $A_A = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iA = \bigoplus_{j=1}^{m} e'_jA$. Il suit du théorème de décomposition unique (VII.6.13) que $m = n$ et, qu'à l'ordre près, on a $e_iA \xrightarrow{\sim} e'_iA$. Par (VIII.1.2), il existe $a_i \in e'_iAe_i$ tel que $e'_ia_i = a_ie_i = a_i$. Soit $a = a_1 + \cdots + a_n$. Alors $e'_ia = ae_i = a_i$ pour chaque i. Il reste à montrer que a est inversible. Mais, toujours par (VIII.1.2), il existe pour chaque i un $b_i \in e_iAe'_i$ tel que $e_ib_i = b_ie'_i = b_i$ et en outre $a_ib_i = e'_i$, $b_ia_i = e_i$. Si on pose $b = b_1 + \cdots + b_n$, il est clair que $ab = ba = 1$. □

DÉFINITION. Une K-algèbre de dimension finie A est dite *symétrique* s'il existe un isomorphisme de $(A - A)$-bimodules ${}_AA_A \xrightarrow{\sim} D({}_AA_A)$.

Il est clair que toute algèbre symétrique est en particulier de Frobenins.

COROLLAIRE 3.8. *Soit A une K-algèbre de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *A est une algèbre symétrique.*
(b) *Il existe une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée et associative $<,>: A \times A \to K$.*
(c) *Il existe une forme linéaire $u \in DA$ dont le noyau ne contient aucun idéal à droite ou à gauche non nul et telle que $u(ab) = u(ba)$ pour tous $a, b \in A$.*

DÉMONSTRATION. Facile et laissée au lecteur: il suffit d'adapter la démonstration de (3.5). □

Tenant compte de la symétrie de la forme bilinéaire sur une algèbre symétrique, il suit de la démonstration de (3.6) que l'on peut prendre la permutation de Nakayama égale à l'identité de sorte que pour tout idempotent primitif e d'une algèbre symétrique A, on a $D(Ae) \xrightarrow{\sim} eA$.

COROLLAIRE 3.9. *Soit e un idempotent primitif d'une algèbre symétrique A, alors $eA \xrightarrow{\sim} D(Ae)$.*

DÉMONSTRATION. Reprendre le dernier paragraphe de la preuve de (3.6) en tenant compte de ce que $u(ab) = u(ba)$ pour tous a, b. □

EXEMPLES 3.10. (a) Soit A une K-algèbre de dimension finie. On considère l'extension triviale Λ de A par son cogénérateur injectif ${}_A(DA)_A$, c'est-à-dire, on le rappelle, le K-espace vectoriel

$$\Lambda = A \oplus DA = \{(a, u) \mid a \in A \text{ et } u \in DA\}$$

muni de la multiplication définie par

$$(a, u)(b, v) = (ab, av + ub)$$

pour $(a, u), (b, v) \in \Lambda$ (voir l'exercice (I.15)). Il est clair que Λ est une K-algèbre de dimension finie. Pour montrer qu'elle est symétrique, on construit une forme bilinéaire $< , >: \Lambda \times \Lambda \to K$ par

$$< (a, u), (b, v) >= v(a) + u(b).$$

Il est facile de vérifier que la forme $< , >$ satisfait les propriétés de (3.8)(b).

(b) Soient K un corps et G un groupe fini. Alors l'algèbre de groupe KG est symétrique. En effet, on définit une forme $< , >: KG \times KG \to K$ par bilinéarité à partir des relations

$$< g, h >= \begin{cases} 1 & \text{si } gh = 1 \\ 0 & \text{si } gh \neq 1 \end{cases}$$

pour $g, h \in G$. Il est clair que $< , >$ est symétrique et associative. Montrons qu'elle est non-dégénérée. Si $a = \sum_{g \in G} g\alpha_g$ est tel que $< a, KG >= 0$, alors, pour tout $h \in G$, on a

$$0 =< a, h >=< \sum_{g \in G} g\alpha_g, h >= \sum_{g \in G} \alpha_g < g, h >= \alpha_{h^{-1}}.$$

Ceci étant vrai pour tout $h \in G$, on en déduit $\alpha_g = 0$ pour tout $g \in G$ et donc $a = 0$.

Exercices du Chapitre XII.

1. Soit K uu corps. Montrer que chacune des algèbres suivantes est héréditaire.

(a) $\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix}$.

2. Une algèbre A est dite semihéréditaire à droite si tout idéal à droite de type fini est projectif. Montrer que si c'est le cas, alors tout sous-module M de type fini d'un module libre L est somme d'un nombre fini d'idéaux à droite de type fini. En déduire que A est semihéréditaire si et seulement si tout sous-module de type fini d'un module projectif est projectif.

3. Montrer qu'une algèbre noethérienne est héréditaire si et seulement si tout idéal à droite est plat.

4. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour un entier n:

(a) $\mathbb{Z}_n$ est semisimple (voir l'exercice (VI.26)).
(b) $\mathbb{Z}_n$ est héréditaire.
(c) n est le produit de nombres premiers deux à deux distincts.

5. Soit A une K-algèbre. Montrer que A est héréditaire si et seulement si, pour tout A-module M, le foncteur $\mathrm{Ext}^1_A(M,-)$ est exact à droite.

6. Soit A une K-algèbre noethérienne. Montrer que A est héréditaire à droite si et seulement si, pour tout A-module à gauche ${}_AN$, le foncteur $\mathrm{Tor}_1^A(-,N)$ est exact à gauche.

7. Montrer que pour une algèbre A, les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) Tout idéal à droite de A est libre.
(b) Tout sous-module d'un module libre est libre.

8. Montrer que, si A, B sont héréditaires à droite et M est un $(A-B)$-bimodule, alors $\left[\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right]$ est héréditaire à droite.

9. Montrer que $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ n'est pas projectif. En déduire que $\left[\begin{smallmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{smallmatrix}\right]$ est héréditaire à droite, mais pas à gauche.

10. Soient A, B deux K-algèbres et $\varphi : A \to B$ un morphisme. Montrer que, si B_A est plat, alors il existe, pour un B-module X et un A-module V, un isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_n^B(X, V \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_n^A(X, V)$$

pour chaque $n \geq 0$, fonctoriel en chaque variable.

11. Soit A une algèbre de Frobenius. Montrer que $M_n(A)$ est de Frobenius.

12. Prouver en détail (3.8) et (3.9).

Bibliographie.

La bibliographie présente n'a aucune prétention à l'exhaustivité. Elle ne vise qu'à indiquer quelques livres ou manuels de cours qui traitent des sujets présentés ici (et qui ont souvent été utilisés comme sources).

[1] I.T. ADAMSON: *Rings, modules and algebras*, Oliver and Boyd, Edinburgh (1971).

[2] F.W. ANDERSON et K.R. FULLER: *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1973).

[3] M. AUSLANDER, I. REITEN et S.O. SMALØ: *Representation theory of artin algebras*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[4] H. BASS: *Algebraic K-theory* Benjamin, New York (1968).

[5] T.S. BLYTH: *Module theory*, Clarendon Press, Oxford (1990).

[6] N. BOURBAKI: *Éléments de mathématique*, Algèbre, Chapitres II, III et VIII, Hermann (1970) et chapitre X, Masson, Paris (1980).

[7] I. BUCUR et A. DELEANU: *Introduction to the theory of categories and functors*, Wiley-Interscience, London-New York-Toronto-Sydney (1968).

[8] H. CARTAN et S. EILENBERG: *Homological algebra*, Princeton University Press, Princeton (1973).

[9] P.M. COHN: *Algebra*, Second Edition, Volume 1 (1982), Volume 2 (1989), Volume 3 (1991), Wiley-Interscience, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore.

[10] C.W. CURTIS et I. REINER: *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley-Interscience, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore (1988).

[11] Yu.A. DROZD et V.V. KIRICHENKO: *Finite dimensional algebras*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1994).

[12] R. FOSSUM, P. GRIFFITH et I. REITEN: *Trivial extensions of abelian categories*, Lecture Notes in Mathematics 456, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1975).

[13] P. FREYD: *Abelian categories*, Harper and Row, New York (1964).

[14] R. GODEMENT: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris (1958).

[15] P.J. HILTON et U. STAMMBACH: *A course in homological algebra*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[16] J.P. JANS: *Rings and homology*, Holt, Rinehart and Winston, New York, Chicago, San Francisco, Toronto, London (1964).

[17] J. LAMBEK: *Lectures on rings and modules*, Ginn and Blaisdell, Boston (1966).

[18] S. LANG: *Algebra* (2e édition), Addison-Wesley, Reading MA (1984).

[19] S. MAC LANE: *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[20] S. MAC LANE: *Homology*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1963).

[21] B. MITCHELL: *Theory of Categories*, Academic Press, New York-San Francisco-London (1966).
[22] D.G. NORTHCOTT: *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, London and New York (1960).
[23] D.G. NORTHCOTT: *A first course of homological algebra*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
[24] R.S. PIERCE: *Associative algebras*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1980).
[25] J.J. ROTMAN: *An introduction to homological algebra*, Academic Press, New York-San Francisco-London (1979).
[26] B. STENSTRÖM: *Rings of quotients*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1975).
[27] C.A. WEIBEL: *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).

Index.