ALGEBRES PRE-INCLINEES ET CATEGORIES DERIVEES

Ibrahim Assem et Andrzej Skowronski

[*Cet article apparaît dans sa forme définitive et aucune autre version de ce travail ne sera soumise ailleurs pour publication*].

Soient k un corps algébriquement clos et A une k-algèbre (associative, unifère) de dimension finie. Sans perte de généralité, on peut supposer A sobre et connexe. Tous nos modules sont à droite et de k-dimension finie. On notera mod A la catégorie des A-modules et $D^b(A)$ la catégorie dérivée des complexes bornés sur mod A [V] . La structure de $D^b(A)$ est connue dans les cas où A est une algèbre héréditaire de représentation finie ou docile, ou bien A est une algèbre tubulaire canonique (au sens de Ringel [R1]) [H2] [HR2] . Dans ces deux cas, tout cycle de $D^b(A)$ se trouve entièrement dans un tube.

Nous prouvons que, réciproquement, si tout cycle de $D^b(A)$ se trouve dans un tube, alors $D^b(A)$ est équivalente, en tant que catégorie triangulée, à $D^b(C)$, où C est soit héréditaire de représentation finie ou docile, soit une algèbre tubulaire canonique. En outre, c'est le cas si et seulement si A s'obtient de C au moyen d'une suite finie d'inclinaisons et de co-inclinaisons. Si C est héréditaire, A est en fait une algèbre pré-inclinée [AH] . La démonstration de notre résultat (section (5)) nous permet d'obtenir une classification des algèbres pré-inclinées de type Dynkin ou Euclidien. Nous introduisons une notion de connexité simple pour les algèbres triangulaires qui ne sont pas nécessairement de représentation finie et montrons que la classification se scinde en deux cas, le cas où l'algèbre est simplement connexe et celui où elle est pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ (section (4)). Ce dernier cas est résolu dans la section (3), alors que le cas simplement connexe se divise encore en deux parties: si l'algèbre est de représentation infinie, nous donnons une description complète par carquois liés (section (2)) et si elle est de représentation finie, nous donnons un critère pratique en termes de la forme quadratique de l'algèbre (section (6)). Enfin, dans une dernière section, nous présentons une classification détaillée par carquois liés des algèbres pré-inclinées de type $\mathbb{D}_n$. Ce résultat, compte tenu de [AH] et [H1] , achève la classification des algèbres pré-inclinées de type Dynkin. Il a été utile dans les parties combinatoires des démonstrations des résultats précédents, ainsi que dans d'autres problèmes de classification d'algèbres dociles (voir, par exemple, [ANS] et [NS]). Sauf dans la dernière partie, la plupart des démonstrations ne sont qu'esquissées. Les détails paraîtront dans [AS1] [AS2] [AS3] et [AS4] . Dans la section (7), par contre, nous donnons une démonstration complète de notre résultat.

Ces résultats ont été présentés par le premier auteur au Séminaire Malliavin en mars 1987. Ils ont été obtenus alors que les deux auteurs visitaient l'Université de Bielefeld en tant que boursiers Alexandre von Humboldt. Ils voudraient remercier C. M. Ringel pour son hospitalité.

1. Préliminaires

1.1 On rappelle qu'un *carquois* Q est défini par la donnée d'un ensemble de points Q_o et d'un ensemble de flèches Q_1. Une *relation* d'un point x à un point y est une combinaison linéaire $\rho = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$ où, pour chaque $1 \leq j \leq m$, λ_j est un scalaire non-nul et w_j un chemin de x à y de longueur au moins deux (nous distinguons soigneusement entre un *chemin* de Q, orienté par définition, et une *allée*, qui ne l'est pas). Une relation ρ est une *relation-zéro* (respectivement, une *relation de commutativité*) si $m = 1$ (respectivement, $m = 2$). Un ensemble de relations engendre un idéal bilatère I de l'algèbre des chemins kQ de Q. La paire (Q,I) est alors appelée un *carquois lié*. Si $I = 0$, le carquois est dit *libre*. On sait que, pour toute k-algèbre A (localement) de dimension finie, sobre (c'est à dire telle que $A/\mathrm{rad}\, A \xrightarrow{\sim} k \times \ldots \times k$) et connexe (c'est à dire dont les seuls idempotents centraux sont 0 et 1), il existe un carquois lié connexe (Q_A,I) tel qu'il existe un isomorphisme $A \xrightarrow{\sim} kQ_A/I$ (appelé une *présentation* de A) [G1]. L'algèbre A est dite *triangulaire* si son carquois Q_A n'a pas de cycles orientés. Pour chaque $i \in (Q_A)_o$, on notera e_i l'idempotent primitif correspondant de A, $S(i)$ le A-module simple correspondant et $P(i)$ (respectivement, $I(i)$) la couverture projective (respectivement, l'enveloppe injective) de $S(i)$. Le *support* d'un A-module M est l'ensemble $\{i \in (Q_A)_o \mid \mathrm{Hom}_A(P(i),M) \neq 0\}$. L'algèbre d'un carquois lié $A = kQ/I$ peut aussi être considérée comme une k-catégorie dont l'ensemble d'objets A_o est Q_o et l'ensemble $A(x,y)$ des morphismes de x à y est le quotient de l'espace vectoriel $kQ(x,y)$ des combinaisons linéaires des chemins de x à y par le sous-espace $I(x,y) = I \cap kQ(x,y)$ [BoG].

1.2 Soit K une catégorie de Krull-Schmidt, c'est à dire une k-catégorie où les idempotents scindent. Un *cycle* de K est une suite de morphismes non-nuls et non-inversibles:

$$M_o \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \rightarrow \ldots \xrightarrow{f_m} M_m = M_o$$

où les M_i sont des objets indécomposables de K [R1]. Pour une algèbre A, la catégorie $\mathrm{mod}\, A$ est dite *dirigée* si elle ne contient pas de cycles. Si c'est le cas, alors A est nécessairement de représentation finie [R1]. Le *carquois* $\Gamma(K)$ d'une catégorie de Krull-Schmidt K a pour points les classes d'isomorphisme $[M]$ des objets indécomposables M de K et il existe une flèche $[M] \rightarrow [N]$ s'il existe un morphisme irréductible $M \rightarrow N$ dans K. Si $K = \mathrm{mod}\, A$ ou $D^b(A)$, alors $\Gamma(K)$ est un carquois de translation. On notera τ la translation de ce carquois. Le carquois $\Gamma(\mathrm{mod}\, A)$, noté plus brièvement Γ_A, est le *carquois d'Auslander-Reiten* de A [G1][R1][H2]. Un carquois de translation Γ sans flèches multiples est appelé un *tube* [R1] s'il contient un chemin cyclique et si sa réalisation topologique $|\Gamma| = S^1 \times \mathbb{R}_o^+$ (où S^1 est le cercle unité et $\mathbb{R}_o^+$ l'ensemble des réels non-négatifs).

Une catégorie de Krull-Schmidt K sera dite <u>de cycles finis</u> [AS3] si, pour chaque cycle $M_o \to M_1 \to \dots \to M_m = M_o$ de K, les objets M_i se trouvent dans un tube de $\Gamma(K)$.

1.3 Soit A une algèbre. Un module T_A est dit <u>inclinant</u> (respectivement, <u>co-inclinant</u>) [HR1] si les conditions suivantes sont satisfaites:

(T1) $\mathrm{Ext}^2_A(T,-) = 0$ (respectivement, (T1') $\mathrm{Ext}^2_A(-,T) = 0$)

(T2) $\mathrm{Ext}^1_A(T,T) = 0$

(T3) Le nombre de facteurs directs indécomposables non-isomorphes de T_A égale le rang du groupe de Grothendieck $K_o(A)$ de A.

Soit $B = \mathrm{End}\, T_A$. On dit alors que $(B, {}_BT_A, A)$ est un <u>triplet inclinant</u> (respectivement, <u>co-inclinant</u>). Un module inclinant T_A est dit <u>séparant</u> si, pour tout A-module indécomposable M, on a soit $\mathrm{Hom}_A(T,M) = 0$, soit $\mathrm{Ext}^1_A(T,M) = 0$ [A2]. Des exemples de modules inclinants séparants sont les <u>modules inclinants d'APR</u> [APR] définis comme suit: à chaque puits i de Q_A, on associe le module inclinant

$$T^{(i)}_A = \tau^{-1}P(i) \oplus (\bigoplus_{j \neq i} P(j)) .$$

Deux algèbres A et B sont dites <u>équivalentes pour les inclinaisons et les co-inclinaisons</u> (ou <u>de la même classe d'inclinaison</u>) [AS2] s'il existe une suite d'algèbres $A = A_o, A_1, \dots, A_m, A_{m+1} = B$ et une suite de modules $T^i_{A_i}$ $(0 \leq i \leq m)$ inclinants ou co-inclinants telles que $A_{i+1} = \mathrm{End}\, T^i_{A_i}$ pour tout i. Etant donné un carquois fini connexe $\vec{\Delta}$ sans cycles orientés, une algèbre A est dite <u>pré-inclinée de type $\vec{\Delta}$</u> [AH] si A est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à $B = k\vec{\Delta}$ et, en outre, chaque $T^i_{A_i}$ est un module inclinant séparant. Si $m \leq 1$, on dit que A est <u>inclinée</u> [HR1]. Par exemple, si H est une algèbre héréditaire docile et T_H est un module inclinant dont tous les facteurs directs indécomposables sont pré-projectifs (ou pré-injectifs), alors l'algèbre $A = \mathrm{End}\, T_H$, appelée <u>docile dérobée</u>, est inclinée. Rappelons qu'une algèbre héréditaire est de représentation finie (respectivement, docile) si et seulement si le graphe sous-jacent de son carquois est un graphe de Dynkin (respectivement, un graphe Euclidien).

Il suit de [H2] que, si (B,T,A) est un triplet inclinant, alors $D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(B)$, en tant que catégories triangulées. En particulier, si A est pré-inclinée de type $\vec{\Delta}$, alors $D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(k\vec{\Delta})$, en tant que catégories triangulées. Happel, Rickard et Schofield [HRS] ont prouvé que pour un carquois fini connexe $\vec{\Delta}$ sans cycles orientés et une algèbre A, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $D^b(A) \xrightarrow{\sim} D^b(k\vec{\Delta})$, en tant que catégories triangulées.

(ii) A est pré-inclinée de type $\vec{\Delta}$.

(iii) A et $k\vec{\Delta}$ sont de la même classe d'inclinaison.

1.4 Soient A une algèbre de dimension finie et $D = \mathrm{Hom}_k(-,k)$ la dualité usuelle sur mod A . L'algèbre répétitive $\hat{A}$ de A est l'algèbre:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & 0 \\ & A_{-1} & & & \\ & \ddots\; M_o & A_o & & \\ & & M_1 & A_1 & \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

où les matrices n'ont qu'un nombre fini de coefficients non-nuls, $A_p = A$, $M_p = {}_A(DA)_A$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, tous les autres coefficients sont nuls. L'addition est l'addition usuelle des matrices et la multiplication est induite des applications canoniques $A \otimes_A DA \tilde{\to} DA$, $DA \otimes_A A \tilde{\to} DA$ et l'application nulle $DA \otimes_A DA \to 0$ [HW] . C'est une algèbre associative, non unifère, localement de dimension finie et auto-injective.

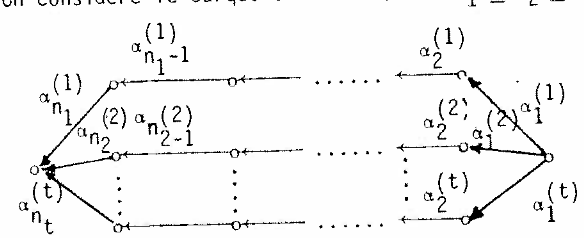
Happel a démontré que, si A est de dimension globale finie, alors $D^b(A)$ est équivalente, en tant que catégorie triangulée, à la catégorie stable $\underline{\mathrm{mod}}\ \hat{A}$ associée à mod $\hat{A}$ [H2] . D'autre part, si (B,T,A) est un triplet inclinant (et A est de dimension globale arbitraire), alors $\underline{\mathrm{mod}}\ \hat{A} \tilde{\to} \underline{\mathrm{mod}}\ \hat{B}$ [TW1][W] (voir aussi [H2]).

1.5 Rappelons que l'extension (respectivement, la co-extension) ponctuelle d'une algèbre A par un A-module M est l'algèbre

$$A[M] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ M & k \end{bmatrix} \quad (\text{respectivement,} \quad [M]A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ DM & A \end{bmatrix})$$

avec l'addition et la multiplication ordinaire des matrices. Son carquois contient Q_A en tant que sous-carquois plein et un point supplémentaire, dit d'extension, qui est une source (respectivement, de co-extension, qui est un puits). Soient A une algèbre triangulaire et $i \in (Q_A)_o$ un puits. La réflexion S_i^+A de A au puits i [HW] est le quotient de $A[I(i)_A]$ par l'idéal bilatère engendré par e_i . Il est clair que les algèbres répétitives de A et S_i^+A sont isomorphes. En outre A et S_i^+A sont de la même classe d'inclinaison [TW2] . Dualement, partant d'une source j de Q_A , on définit la réflexion S_j^-A de A en j .

1.6 On considère le carquois suivant, où $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_t$:



Notons $\alpha^{(s)}$ le chemin $\alpha_1^{(s)}\alpha_2^{(s)}\ldots\alpha_{n_s}^{(s)}$ $(1 \leq s \leq t)$ et U l'espace vectoriel de base $<\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(t)}>$. Soit I un sous-espace de dimension $t-2$ dont l'intersection avec tout sous-espace $<\alpha^{(s)},\alpha^{(s')}>$ $(s \neq s')$ de U est nulle. L'algèbre $A = kQ/I$ est dite canonique de type $(n_1,n_2,\ldots,n_t)$ [R1] . Ringel a démontré que les algèbres dociles canoniques sont les suivantes: l'algèbre de type $(2,2,2,2)$ où $I = <\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}\ ,\ \alpha^{(1)} + \lambda\cdot\alpha^{(2)} + \alpha^{(4)}>$ $(\lambda \in k \setminus \{0,1\})$, les algèbres de type (p,q,r) avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ où $I = <\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}>$ et l'algèbre de type (p,q) où $I = 0$ [R1] . Les algèbres canoniques des types (p,q), $(2,2,r)$, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ et $(2,3,5)$ sont dites domestiques. Elles sont inclinées de types respectifs $\tilde{\mathbb{A}}_{p+q+1}$, $\tilde{\mathbb{D}}_{r+2}$, $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$ et $\tilde{\mathbb{E}}_8$. Les autres algèbres dociles canoniques, c'est à dire des types $(3,3,3)$, $(2,4,4)$, $(2,3,6)$ et $(2,2,2,2)$ sont dites tubulaires.

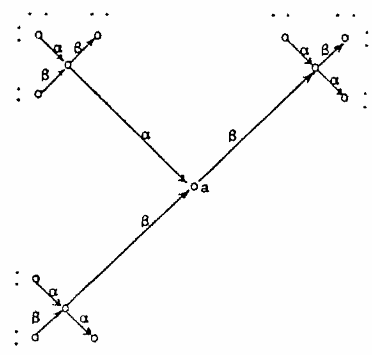
Soit C une algèbre docile canonique. La catégorie dérivée $D^b(C)$ est décrite dans [H2][HR2] . Si C est domestique, le carquois de $D^b(C)$ est formé de composantes transjectives $\mathbb{C}_i$ $(i \in \mathbb{Z})$ et de composantes régulières $\mathbb{R}_i$ $(i \in \mathbb{Z})$. Les composantes transjectives sont isomorphes à la bande infinie $\mathbb{Z}\Delta$, où Δ est le graphe Euclidien correspondant à C . Chaque composante régulière est formée d'une famille de tubes indexés par la droite projective $\mathbb{P}_1(k)$. En outre, si $\mathrm{Hom}_{D^b(C)}(M^\cdot,N^\cdot) \neq 0$ pour $M^\cdot$, $N^\cdot$ indécomposables et $M^\cdot$ dans $\mathbb{C}_i$ (respectivement, $\mathbb{R}_i$), alors $N^\cdot$ appartient soit à $\mathbb{C}_i$, soit à $\mathbb{R}_i$, soit à $\mathbb{C}_{i+1}$ (respectivement, soit à $\mathbb{R}_i$, soit à $\mathbb{C}_{i+1}$, soit à $\mathbb{R}_{i+1}$). Pour une algèbre tubulaire canonique C , le carquois de $D^b(C)$ est formé de familles $\mathbb{R}_q$, $q \in \mathbb{Q}$, où chaque $\mathbb{R}_q$ est une famille de tubes indexés par $\mathbb{P}_1(k)$. En outre, si $\mathrm{Hom}_{D^b(C)}(M^\cdot,N^\cdot) \neq 0$ pour $M^\cdot$, $N^\cdot$ indécomposables et $M^\cdot$ dans $\mathbb{R}_q$, alors $N^\cdot$ appartient à $\mathbb{R}_p$ pour un $q \leq p \leq q+3$. Dans les deux cas, la catégorie $D^b(C)$ est de cycles finis. Un autre cas où $D^b(C)$ est (trivialement) de cycles finis est le suivant: soit C une algèbre héréditaire de représentation finie et Δ le graphe sous-jacent de son carquois, alors le carquois de $D^b(C)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}\Delta$ [H2] . En particulier, $D^b(C)$ est dirigée.

2. Agrandissement d'une algèbre par branches:

2.1 Le fil conducteur à travers les résultats de classification est la notion d'agrandissement d'une algèbre par branches. La branche complète est un carquois lié infini (Q,I) défini comme suit. L'ensemble de points Q_0 est l'ensemble des mots sur l'alphabet formé de deux lettres α et β :
$Q_0 = \{x = \alpha^{n_1}\beta^{m_1}\ldots\alpha^{n_t}\beta^{m_t} \mid t \in \mathbb{N}\ ,\ n_i,m_j \in \mathbb{Z}\ ,\ 1 \leq i,j \leq t\}$. Pour chaque $x \in Q_0$, on définit deux flèches de source x : $\alpha_x : x \to x\alpha$ et $\beta_x : x \to x\beta$ (cela équivaut

à dire que tout $x \in Q_0$ est le but de deux flèches $\alpha_{x\alpha^{-1}} : x\alpha^{-1} \to x$ et $\beta_{x\beta^{-1}} : x\beta^{-1} \to x$). Enfin, I est l'idéal de kQ engendré par tous les mots des formes $\alpha_x\beta_{x\alpha}$ et $\beta_x\alpha_{x\beta}$ (pour $x \in Q_0$). Les flèches de la forme α_x (respectivement, β_x) seront simplement appelées des <u>α-flèches</u> (respectivement, des <u>β-flèches</u>).

Une <u>branche</u> est par définition un sous-carquois lié plein, fini et connexe de la branche complète. Il résulte de [AH] qu'une algèbre A est pré-inclinée de type $\mathbb{A}_n$ si et seulement si $A \xrightarrow{\sim} kQ/I$, où le carquois lié (Q,I) est une branche. Une <u>racine d'extension</u> (respectivement, de <u>co-extension</u>) dans une branche est un sommet a qui n'est pas la source (respectivement, pas le but) d'une α-flèche. La branche est alors appelée une <u>branche d'extension</u> (respectivement, de <u>co-extension</u>) <u>en a</u>. Ainsi une branche d'extension en a est un sous-carquois lié, plein, fini et connexe, contenant a, de l'arbre infini suivant, lié par toutes les relations possibles des formes $\alpha\beta = 0$ et $\beta\alpha = 0$:



Une branche d'extension de la forme $\ldots \circ \xrightarrow{\alpha} \circ \xrightarrow{\alpha} \ldots \xrightarrow{\alpha} \circ\ a$ est appelée une <u>droite dirigée d'extension</u>. On définit dualement une <u>droite dirigée de co-extension</u>. Le nombre de points d'une branche K est appelé sa <u>longueur</u> et noté $|K|$. On conviendra de considérer le carquois vide comme une branche de longueur zéro.

Soient $A = kQ/I$ l'algèbre d'un carquois lié (Q,I) et (Q',I') un sous-carquois lié plein de (Q,I) contenant une source a. On dit que A s'obtient à partir de kQ'/I' en <u>enracinant une branche d'extension</u> (Q'',I'') en a si (Q'',I'') est un sous-carquois lié plein de (Q,I) tel que:

(1) $Q'_0 \cap Q''_0 = \{a\}$, $Q'_0 \cup Q''_0 = Q_0$

(2) I est engendré par I', I'' et tous les chemins $\beta\gamma$, où $\beta \in Q''_1$ a pour but a, et $\gamma \in Q'_1$ a pour source a.

On définit dualement l'enracinement de branches de co-extension.

Soient C une algèbre, et $E_1,\ldots,E_t$ des C-modules indécomposables deux à deux non-isomorphes. Pour $1 \leq i \leq t$, soient K_i une branche d'extension en a_i et

K_i' une branche de co-extension en a_i' (K_i ou K_i' peut être vide). On définit par récurrence l'agrandissement A de C aux modules E_i par les branches d'extension K_i et de co-extension K_i' comme suit. L'algèbre $C[E_1,K_1]$ s'obtient de l'extension ponctuelle $C[E_1]$ en enracinant la branche K_1 au point d'extension a_1. Pour $1 < j \leq t$, $C[E_i,K_i]_{i=1}^{j}$ s'obtient de l'extension ponctuelle $(C[E_i,K_i]_{i=1}^{j-1})[E_j]$ en enracinant la branche K_j au point d'extension a_j. Alors $B = C[E_i,K_i]_{i=1}^{t}$ est appelée l'extension de C aux modules E_i par les branches d'extension K_i. On définit de même la co-extension $B' = {}_{i=1}^{t}[E_i,K_i']C$. Notons maintenant, pour $1 \leq i \leq t$, E_i' l'unique B-module indécomposable dont la restriction à C égale E_i et la restriction à K_i est l'unique K_i-module indécomposable de support le chemin maximal non-nul de but a (formé de α-flèches). Alors $[E_1',K_1']B$ s'obtient de la co-extension ponctuelle $[E_1']B$ en enracinant K_1' au point de co-extension a_1'. Pour $1 < j \leq t$, ${}_{i=1}^{j}[E_i',K_i']B$ s'obtient de $[E_j']({}_{i=1}^{j-1}[E_i',K_i']B)$ en enracinant K_j' au point de co-extension a_j'. Alors $A = {}_{i=1}^{t}[E_i',K_i']B$ est l'agrandissement de C. On dit que C est le coeur de A. C'est une sous-catégorie pleine et convexe de A.

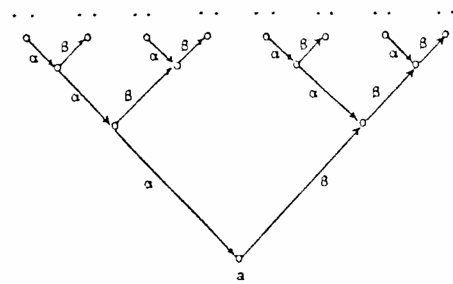
La conjecture générale est que toute algèbre pré-inclinée ou équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique est un agrandissement par branches de certaines algèbres plus élémentaires.

2.2 Dans cette section, nous nous limiterons au cas suivant. Soit C une algèbre docile dérobée, de famille tubulaire $(\mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}_1(k)}$. Nous noterons r_λ le rang du tube (stable) $\mathcal{T}_\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{P}_1(k))$. Soient $E_1,E_2,\ldots,E_t$ des C-modules simples réguliers deux à deux non-isomorphes, $K_1,K_2,\ldots,K_t$ des branches d'extension et $K_1',K_2',\ldots,K_t'$ des branches de co-extension. On définit le type tubulaire $n_A = (n_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}_1(k)}$ de l'agrandissement $A = {}_{i=1}^{t}[E_i',K_i']\, C\, [E_i,K_i]_{i=1}^{t}$ par:

$$n_\lambda = r_\lambda + \sum_{E_i \in \mathcal{T}_\lambda} (|K_i| + |K_i'|) \quad .$$

On conviendra d'écrire, au lieu de $(n_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{P}_1(k)}$, la suite finie ayant au moins deux n_λ et comprenant tous ceux qui sont plus grands que 1, ordonnés suivant un ordre non-décroissant. Un agrandissement A d'une algèbre docile dérobée C en des modules simples réguliers est dit domestique (respectivement, tubulaire) si son type tubulaire est une des suites suivantes: (p,q), $(2,2,r)$, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ ou $(2,3,5)$ (respectivement, $(3,3,3)$, $(2,4,4)$, $(2,3,6)$ ou $(2,2,2,2)$).

2.3 Ces concepts généralisent ceux de [R1]: une branche tronquée en a (branche dans la terminologie de [R1]) est un sous-carquois lié plein, fini et connexe, contenant a, de l'arbre infini suivant, lié par toutes les relations de la forme $\alpha\beta = 0$:



En d'autres termes, une branche tronquée est une branche telle que le but d'une β-flèche n'est pas la source d'une α-flèche. Si C est une algèbre docile dérobée, $E_1,\dots,E_t$ des C-modules simples réguliers deux à deux non-isomorphes et $K_1,\dots,K_t$ des branches tronquées, l'extension par branches $B = C[E_i,K_i]_{i=1}^{t}$ est une extension tubulaire au sens de [R1](4.7). Ringel a démontré que, si A est une extension (respectivement, co-extension) domestique d'une algèbre docile dérobée en des modules simples réguliers par des branches tronquées, alors A est une algèbre inclinée de type Euclidien ayant une tranche complète dans sa composante pré-injective (respectivement, pré-projective) et aucun projectif (respectivement, injectif) dans cette composante. Réciproquement, toute algèbre inclinée de représentation infinie de type Euclidien est d'une de ces formes [R1](4.9).

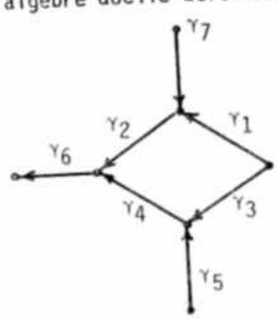
<u>2.4 THEOREME</u> [AS3] . Une algèbre A est pré-inclinée de type Euclidien (respectivement, équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique) et de représentation infinie si et seulement si A est isomorphe à un agrandissement domestique (respectivement, tubulaire) d'une algèbre docile dérobée en des modules simples réguliers. En outre, dans ce cas, n_A égale le type tubulaire de l'algèbre héréditaire (respectivement, tubulaire canonique) correspondante.

<u>Démonstration</u>. La nécessité suivra de (3.1) si A est pré-inclinée de type $\widetilde{\mathbb{A}}_m$ et de (5.3) dans les autres cas. Nous démontrons ici la suffisance. Soit A un agrandissement domestique (respectivement, tubulaire) de l'algèbre docile dérobée C en des modules simples réguliers. Il suffit (d'après (1.3)) de prouver que A est de la classe d'inclinaison d'une algèbre héréditaire de type Euclidien (respectivement, d'une algèbre tubulaire canonique). Pour commencer, on trouve une algèbre B de la classe d'inclinaison de A , qui est un agrandissement de C par des droites dirigées et telle que $n_B = n_A$. En effet, on applique l'algorithme de [AH](2.3) pour effacer successivement les relations sur les branches. Comme à chaque étape les calculs ont lieu à l'intérieur d'une branche donnée, le type tubulaire n'est pas affecté.

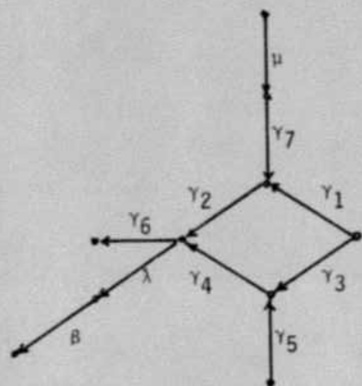
Nous montrons maintenant qu'il existe une algèbre D , de la classe d'inclinaison de B (donc de A), qui est une extension de C par des droites dirigées, et telle que $n_D = n_B$. En effet, soit K' une droite de co-extension de B et i son puits. Pour réfléchir en i , on remarque que, d'après (2.1), le support de la restriction de $I(i)_B$ à K' égale K' , le support de sa restriction à C est un C-module simple régulier E et, s'il existe aussi une droite d'extension K correspondant à E , alors la restriction de $I(i)$ à K est K . Enfin, ce support ne coupe pas les autres droites d'extension et de co-extension. Ainsi, dans l'algèbre S_i^+B , le puits i de B est remplacé par une source, qui est point d'extension de $B/\langle e_i\rangle$ et le module d'extension est dans le tube de $B/\langle e_i\rangle$ contenant E . Par conséquent, $n_B = n_{S_i^+B}$. Si on applique successivement ce processus aux points de K' , on obtient une algèbre de la même classe d'inclinaison que B , de même type tubulaire, mais dans laquelle K' est remplacée par une droite dirigée d'extension. On obtient D en appliquant ce processus successivement à toutes les droites de co-extension.

Supposons que A est domestique. Comme les droites dirigées sont des branches tronquées, il résulte de (2.3) que D est une algèbre inclinée de type Euclidien ayant une tranche complète dans sa composante pré-injective. Par contre, si A est tubulaire, D est, par définition [R1](5), une algèbre tubulaire. Mais alors il suit de [HR2](1) qu'elle est équivalente , pour les inclinaisons et les co-inclinaisons, à une algèbre tubulaire canonique. Dans les deux cas, le type tubulaire est préservé. Cela achève la démonstration.

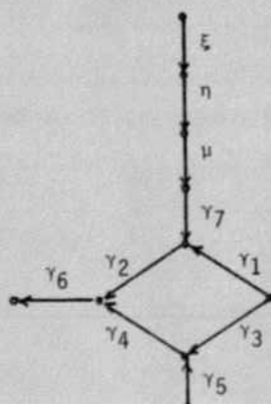
<u>Exemple</u>: Soit C l'algèbre docile dérobée de type $\widetilde{\mathbb{E}}_6$ donnée par le carquois:



lié par $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_3\gamma_4$. On a $n_C = (2,3,3)$. Soit E_C le module simple régulier de vecteur-dimension $\begin{smallmatrix} & & 0 & \\ 0 & 1 & \begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix} & 0 \\ & & 0 & \end{smallmatrix}$. On enracine en E la branche d'extension de longueur un, et la branche de co-extension de longueur deux formée d'une β-flèche. Cela donne l'algèbre A du carquois:



lié par $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_3\gamma_4$, $\gamma_4\lambda = 0$, $\lambda\beta = 0$, $\mu\gamma_7\gamma_2\gamma_6 = 0$. C'est un agrandissement de C de type tubulaire $n_A = (2,3,6)$. Donc A est dans la classe d'inclinaison de l'algèbre tubulaire canonique de ce type. Afin de voir ceci, on commence par appliquer un module inclinant d'APR correspondant au but de β . Cela donne une algèbre B , de même carquois que A , lié seulement par $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_3\gamma_4$, $\gamma_4\lambda = 0$ et $\mu\gamma_7\gamma_2\gamma_6 = 0$. On applique ensuite successivement des réflexions correspondant aux buts de β et λ . On obtient l'algèbre D du carquois:



lié par $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_3\gamma_4$ et $\mu\gamma_7\gamma_2\gamma_6 = 0$. C'est bien une algèbre tubulaire de type (2,3,6).

3. Algèbres pré-inclinées de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$:

3.1 Dans cette section, nous exposons la classification des algèbres pré-inclinées de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ $(m \geq 1)$ [AS1] :

<u>THEOREME</u>. Une algèbre A est pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ si et seulement s'il existe une présentation $A \xrightarrow{\sim} kQ/I$ de A par un carquois lié (Q,I) de $m+1$ points

tel que:

(R1) Le nombre de flèches de source ou de but donné est au plus égal à deux.

(R2) Pour chaque flèche α , il existe au plus une flèche β et une flèche γ telles que $\alpha\beta$ et $\gamma\alpha$ n'appartiennent pas à I .

(R3) I est engendré par un ensemble de chemins (relations-zéro) de longueur deux.

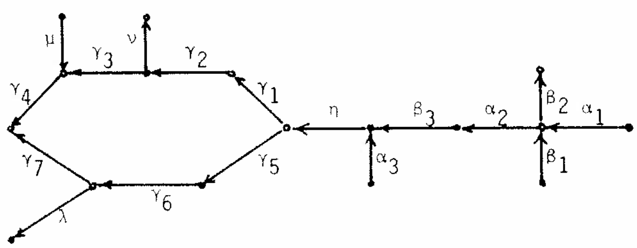
(R4) Pour chaque flèche α , il existe au plus une flèche ξ et une flèche η telles que $\alpha\xi$ et $\eta\alpha$ appartiennent à I .

(R5) Q contient un cycle unique (non-orienté) C .

(R6) Le nombre de relations-zéro de C dans le sens des aiguilles d'une montre égale le nombre de relations-zéro dans le sens inverse.

En d'autres termes, les algèbres pré-inclinées de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ sont des agrandissements par branches des algèbres dont le carquois ordinaire est un cycle non-orienté, lié par des relations-zéro de longueur deux et satisfaisant la condition (R6).

<u>Exemple</u>: On considère l'algèbre A du carquois:



lié par $I = \langle\gamma_1\gamma_2,\gamma_2\gamma_3,\mu\gamma_4,\gamma_5\gamma_6,\eta\gamma_5,\beta_3\eta,\alpha_2\beta_3,\beta_1\alpha_2,\alpha_1\beta_2\rangle$. On voit de suite que A satisfait les conditions (R1) à (R6) et donc est une algèbre pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_{16}$. Observons que A est de représentation finie.

3.2 Il suit immédiatement de l'énoncé du théorème que les algèbres pré-inclinées de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ sont bisérielles. Rappelons qu'une k-catégorie localement bornée Λ est dite <u>bisérielle</u> si le radical de tout Λ-module projectif indécomposable (à droite ou à gauche) qui n'est pas unisériel est la somme de deux sous-modules unisériels dont l'intersection est simple ou nulle. Λ est dite <u>bisérielle spéciale</u> [SW] si elle admet une présentation $\Lambda \cong kQ/I$ telle que (Q,I) satisfait les conditions (R1) et (R2). Toute algèbre bisérielle spéciale est bisérielle, et toute algèbre bisérielle de représentation finie est bisérielle spéciale [SW] . Rappelons aussi que Λ est dite satisfaire <u>$\alpha'(\Lambda) \leq 2$</u> si, pour tout $x \in (\Gamma_\Lambda)_0$, il existe au plus deux σ-orbites de flèches ayant x pour source ou pour but [H1](5). On sait qu'une algèbre Λ est pré-inclinée de type $\mathbb{A}_n$ si et seulement si elle est simplement connexe de représentation finie, bisérielle spéciale et satisfait $\alpha'(\Lambda) \leq 2$. On en déduit:

LEMME. Une catégorie localement bornée Λ est bisérielle spéciale avec $\alpha'(\Lambda) \leq 2$ si et seulement si elle admet une présentation $\Lambda \widetilde{\to} kQ/I$ où (Q,I) satisfait les conditions (R1) (R2) (R3) et (R4).

Démonstration: Si Λ est bisérielle spéciale et $\alpha'(\Lambda) \leq 2$, alors, par définition, $\Lambda \widetilde{\to} kQ/I$, où (Q,I) satisfait (R1) et (R2). Comme il est clair que tout indécomposable projectif-injectif est unisériel, alors I est engendré par un ensemble de chemins. On considère un revêtement galoisien $F : \widetilde{\Lambda} \to \Lambda$ avec le groupe fondamental libre de Q [G2]. Le carquois $\widetilde{Q}$ de $\widetilde{\Lambda}$ est un arbre lié par l'ensemble $\widetilde{I}$ des chemins w de $\widetilde{Q}$ tels que $F(w) \in I$. Comme le foncteur de rabaissement F_λ : mod $\widetilde{\Lambda} \to$ mod Λ associé à F préserve les suites d'Auslander-Reiten, on a $\alpha'(\widetilde{\Lambda}) \leq 2$. Par conséquent $(\widetilde{Q},\widetilde{I})$ satisfait (R3) et (R4). Il en est donc de même de (Q,I) . Réciproquement, si (Q,I) satisfait ces conditions, alors Λ est bisérielle spéciale et toute sous-catégorie finie K du revêtement universel $\widetilde{\Lambda}$ de Λ est pré-inclinée de type $\mathbb{A}_n$. En particulier, $\alpha'(K) \leq 2$. Il suit alors de [DS][WW] que $\alpha'(\Lambda) \leq 2$.

3.3 La démonstration du théorème (3.1) fait intervenir les notions précédentes. Soit en effet A une algèbre pré-inclinée de type $\widetilde{\mathbb{A}}_m$. Alors il existe une algèbre héréditaire H de type $\widetilde{\mathbb{A}}_m$ telle que $\underline{\text{mod}}\ \hat{A} \widetilde{\to} \underline{\text{mod}}\ \hat{H}$ (voir (1.3)). On démontre:

(a) Soit A une algèbre telle que $\underline{\text{mod}}\ \hat{A} \widetilde{\to} \underline{\text{mod}}\ \hat{H}$ pour H héréditaire de type $\widetilde{\mathbb{A}}_m$. Alors $\hat{A}$ est bisérielle.

Il suit de [H2](7.3) et [S] que A est triangulaire. On prouve:

(b) Soit A une algèbre triangulaire telle que $\hat{A}$ est bisérielle. Alors A est bisérielle spéciale avec $\alpha'(A) \leq 2$.

Remarquons qu'il s'ensuit immédiatement que $\hat{A}$ est en fait bisérielle spéciale. Nous avons montré que A admet une présentation $A \widetilde{\to} kQ/I$ où le carquois lié (Q,I) satisfait les conditions (R1) à (R4). En outre, Q n'est pas un arbre puisque sinon A serait pré-inclinée de type $\mathbb{A}_n$ et alors $\hat{A}$ serait localement de représentation finie [AHR], une absurdité, puisque $\underline{\text{mod}}\ \hat{A} \widetilde{\to} \underline{\text{mod}}\ \hat{H}$ avec H de représentation infinie. Par conséquent, Q contient au moins un cycle non-orienté. D'autre part, comme $D^b(H) \widetilde{\to} \underline{\text{mod}}\ \hat{H}$ est de cycles finis, il en est de même de $D^b(A)$. On démontre:

(c) Soit A une algèbre triangulaire telle que $D^b(A)$ est de cycles finis. Alors toute sous-catégorie pleine K de A qui est bisérielle spéciale et telle que $\alpha'(K) \leq 2$ contient au plus un cycle.

En particulier, Q contient exactement un cycle non-orienté C . Il résulte alors de [S] que la condition (R6) est satisfaite. Enfin, comme A est pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$, Q a m+1 points. Cela achève la démonstration de la nécessité. La suffisance se démontre directement, en construisant une suite de modules inclinants séparants aboutissant à une algèbre héréditaire de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$.

3.4 Nous caractérisons également les algèbres pré-inclinées de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ de représentation finie. Un chemin $\gamma:x_1\to\ldots\to x_t$ de Γ_A est dit <u>sectionnel</u> [B](2.1). si $x_i \neq \tau x_{i+2}$ pour $1 \leq i \leq t-2$. Un chemin sectionnel γ est dit <u>maximal</u> s'il n'est pas un sous-chemin d'un chemin sectionnel $\gamma' \neq \gamma$. Nous pouvons énoncer:

<u>THEOREME</u> [AS1] . Soit A une algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) A est pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ de représentation finie

(ii) A satisfait les conditions (R1) à (R6) et:

(R7) Le cycle C est lié par au moins une relation-zéro

(iii) A satisfait les conditions suivantes:

(a) mod A est dirigée avec m+1 projectifs

(b) $\alpha'(A) \leq 2$

(c) Le groupe d'homotopie $\pi_1(\Gamma_A)$ de Γ_A (voir [BoG] (1.2)) est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

(d) Pour chaque représentant w d'un générateur de $\pi_1(\Gamma_A)$, le nombre de chemins sectionnels maximaux de w dans le sens des aiguilles d'une montre égale le nombre de chemins sectionnels maximaux dans le sens inverse.

3.5 Soit A une algèbre telle que mod A est dirigée. Alors A admet une présentation $A \tilde{\to} kQ/I$ telle que le carquois lié (Q,I) satisfait les conditions (R1) à (R5) si et seulement si $\alpha'(A) \leq 2$ et $\pi_1(\Gamma_A) \tilde{\to} \mathbb{Z}$. En effet, supposons que $A \tilde{\to} kQ/I$ où (Q,I) satisfait (R1) à (R5) . Comme mod A est dirigée, A est de représentation finie. Il suit du lemme (3.2) que A est bisérielle spéciale avec $\alpha'(A) \leq 2$. Enfin, (R5) et [BrG](1.2) [MP](4.3) entraînent que $\pi_1(\Gamma_A) \tilde{\to} \mathbb{Z}$. Réciproquement si $\alpha'(A) \leq 2$ et $\pi_1(\Gamma_A) \tilde{\to} \mathbb{Z}$, il suit encore de [BrG](1.2) [MP](4.3) que le carquois Q de A a exactement un cycle non-orienté. Cela donne (R5). Comme mod A est dirigée, A est de représentation finie. Il résulte de [SW](1.2) que A est bisérielle spéciale. D'après le lemme (3.2), il existe une présentation $A \tilde{\to} kQ/I$ de A telle que (Q,I) satisfait (R1) à (R4).

Soient A une algèbre satisfaisant les conditions équivalentes précédentes et w une allée de Γ_A . On notera $\mu_-(w)$ (respectivement, $\mu_+(w)$) le nombre de chemins sectionnels maximaux de w dans le sens des aiguilles d'une montre (respectivement, dans le sens inverse). On prouve qu'alors, si w est un représentant d'un générateur du groupe cyclique infini $\pi_1(\Gamma_A)$, la différence entre le nombre de relations-zéro sur le cycle unique de (R5) dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens inverse égale, en valeur absolue, $|\mu_+(w) - \mu_-(w)|$.

Le théorème suit directement de ces remarques. Il est évident que (i) implique (ii), et il résulte de [SW] que (ii) implique (i). Soit A une algèbre pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ de représentation finie. Il suit alors de [H2](7.6) que mod A est dirigée. Le théorème (3.1) et le lemme (3.2) entraînent $\alpha'(A) \leq 2$. Les conditions (c) et (d) suivent alors des remarques précédentes. Donc (i) implique (iii). Enfin, (iii) implique (ii) résulte aussi des remarques précédentes.

4. Algèbres simplement connexes:

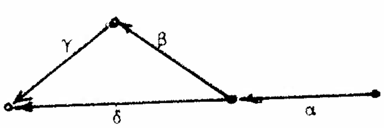
4.1 Dans [BoG], Bongartz et Gabriel définissent une notion de connexité simple pour les algèbres de représentation finie. Dans cette section, nous introduisons une généralisation naturelle de cette notion pour les algèbres triangulaires qui ne sont pas nécessairement de représentation finie. Rappelons d'abord la notion de groupe fondamental d'un carquois lié [Gr][MP]. Soit (Q,I) un carquois lié connexe. Une relation $\rho = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j \in I(x,y)$ est dite minimale si $m \geq 2$ et si, pour tout sous-ensemble propre J de $\{1,2,\ldots,m\}$, $\sum_{j \notin J} \lambda_j w_j \notin I$. Notons $m(I)$ l'ensemble des relations minimales de l'idéal I , et $\pi_1(Q,x_0)$ le groupe fondamental du carquois Q au point x_0 . Soit $N(Q,m(I),x_0)$ le sous-groupe distingué de $\pi_1(Q,x_0)$ engendré par tous les éléments de la forme $[\gamma v u^{-1} \gamma^{-1}]$ où γ est une allée de x_0 à x et u,v sont des chemins de x à y tels qu'il existe un élément $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j \in m(I)$ avec $u = w_j$ et $v = w_l$ pour $1 \leq j,l \leq m$. Le groupe fondamental $\pi_1(Q,I)$ de (Q,I) est le groupe quotient:

$$\pi_1(Q,I) = \pi_1(Q,x_0)/N(Q,m(I),x_0) .$$

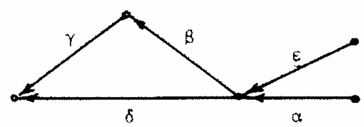
Une algèbre triangulaire A est dite simplement connexe [AS2] si, pour toute présentation $A \tilde{\to} kQ/I$ de A , le groupe fondamental $\pi_1(Q,I)$ du carquois lié (Q,I) est trivial.

Il suit directement de [BrG](1.2) [MP](4.3) que, si A est triangulaire et de représentation finie, alors, pour toute présentation $A \tilde{\to} kQ/I$, on a $\pi_1(Q,I) \tilde{\to} \pi_1(\Gamma_A)$. Par conséquent une algèbre de représentation finie est simplement connexe si et seulement si elle l'est au sens de [BoG].

Exemple : L'algèbre A du carquois:



lié par $\alpha\beta\gamma = \alpha\delta$ n'est pas simplement connexe. En effet, on obtient une nouvelle présentation $A \tilde{\to} kQ/I$ de A en remplaçant δ par $\delta' = \delta - \beta\gamma$. Alors $I = \langle\alpha\delta'\rangle$ et $\pi_1(Q,I) \tilde{\to} \mathbb{Z}$. Par contre, l'algèbre B du carquois:



lié par $\alpha\beta = \alpha\beta\gamma$, $\varepsilon\delta = 0$ est simplement connexe.

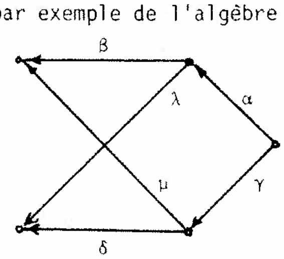
4.2 Un critère pratique de connexité simple pour les algèbres de représentation finie est la condition de séparation de Bautista, Larriõn et Salmerôn [BLS] . Un A-module indécomposable projectif $P(i)$ est dit de <u>radical séparé</u> si les supports de deux facteurs indécomposables non-isomorphes quelconques de $\operatorname{rad} P(i)$ sont contenus dans deux composantes connexes distinctes du sous-carquois plein de Q_A obtenu en omettant tous les points j tels qu'il existe un chemin de j à i . Si chaque indécomposable projectif est de radical séparé, A est dite satisfaire la <u>condition de séparation</u>. Une algèbre triangulaire de représentation finie satisfait la condition de séparation si et seulement si elle est simplement connexe [BLS].

Rappelons qu'une algèbre A est dite <u>Schurienne</u> si, pour toute paire $x,y \in A_0$, $\dim_k A(x,y) \leq 1$. Une algèbre Schurienne A est dite <u>sans $\tilde{\mathbb{A}}$</u> si A ne contient pas de sous-catégorie pleine $B \tilde{\to} kQ$, où le graphe sous-jacent de Q est $\tilde{\mathbb{A}}_m$ (pour un $m \geq 1$).

<u>LEMME</u>. Si A est une algèbre Schurienne, sans $\tilde{\mathbb{A}}$ et simplement connexe, alors elle satisfait la condition de séparation.

<u>Démonstration</u>. En effet, A étant Schurienne et simplement connexe, il résulte de [BrG](2.3) que le premier groupe d'homologie de A s'annule. Mais alors, puisque A est sans $\tilde{\mathbb{A}}$, il suit de [Bo1](2.3) [BrG](2.9) que A satisfait la condition de séparation.

Il existe des algèbres simplement connexes qui ne satisfont pas la condition de séparation. C'est le cas par exemple de l'algèbre du carquois:



lié par $\alpha\beta = \gamma\mu$, $\alpha\lambda = \gamma\delta$. Cet exemple montre aussi qu'il n'est pas toujours vrai qu'une sous-catégorie pleine et convexe d'une algèbre simplement connexe est simplement connexe (contrairement au cas de représentation finie [BrG](2.8)).

4.3 Nous donnons un critère de connexité simple pour les algèbres dont la catégorie dérivée est de cycles finis:

<u>THEOREME</u> [AS2]. Soit A une algèbre telle que $D^b(A)$ est de cycles finis. Alors A est simplement connexe si et seulement si A n'est pas pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ $(m \geq 1)$.

Rappelons que toute algèbre pré-inclinée de type Dynkin est simplement connexe de représentation finie [A1](3.5). Une conséquence immédiate du théorème précédent est que toute algèbre pré-inclinée de type Euclidien $\tilde{\mathbb{D}}_n$ $(n \geq 4)$ ou $\tilde{\mathbb{E}}_p$ $(p = 6, 7$ ou $8)$ est simplement connexe. De même, toute algèbre équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique est simplement connexe.

La démonstration utilise essentiellement le théorème (3.1). En effet, il suit immédiatement de ce théorème que, si A est pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$, alors il existe une présentation $A \xrightarrow{\sim} kQ/I$ telle que $\pi_1(Q,I) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Réciproquement, supposons que A n'est pas simplement connexe. Comme $D^b(A)$ est de cycles finis, A est triangulaire (voir (5.1)). Soit $A \xrightarrow{\sim} kQ/I$ une présentation de A telle que $\pi_1(Q,I) \neq 0$. Alors (Q,I) contient une allée fermée w de longueur minimale qui n'est pas contractile. Soit C la sous-catégorie de A formée par les objets et les morphismes de w. Au moyen de calculs combinatoires longs et fastidieux, on prouve que C est une sous-catégorie pleine de A, liée par des relations-zéro de longueur deux. On montre ensuite que le nombre de relations-zéro dans le sens des aiguilles d'une montre égale le nombre de relations-zéro dans le sens inverse. On prouve alors que C est convexe dans A et enfin que A est un agrandissement de C par des branches, ce qui achève la démonstration.

Notre théorème montre que la classification des algèbres dont la catégorie dérivée est de cycles finis se scinde en deux cas: celui où l'algèbre est pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$, déjà résolu, celui où l'algèbre est simplement connexe, qui sera résolu dans les deux sections suivantes.

5. Catégories dérivées de cycles finis:

5.1 Notre objectif est maintenant de caractériser les algèbres A dont la catégorie dérivée $D^b(A)$ est de cycles finis (voir (1.6)).

<u>LEMME</u>. Soit A une algèbre telle que $D^b(A)$ est de cycles finis. Alors A est triangulaire et $\operatorname{mod} \hat{A}$ est de cycles finis.

<u>Démonstration</u>. Si A n'est pas triangulaire, elle contient un cycle orienté

$a_0 \to a_1 \to \dots \to a_t = a_0$ dans son carquois ordinaire. Pour chaque $1 \le i \le t$, soit M_i le module unisériel de longueur deux dont la coiffe est $S(a_{i-1})$ et le socle $S(a_i)$.

La longueur d'un complexe indécomposable borné $X^\cdot = (X^\ell, d^\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ est par définition la cardinalité de l'ensemble fini $\{\ell \in \mathbb{Z} \mid d^\ell \neq 0\}$. Soient maintenant $j \ge 1$ et $0 \le i < t$ tels que $j \equiv i$ (modulo t). Il existe un complexe indécomposable $X_j^\cdot$ de longueur $j-1$ de la forme:

$$\dots \to 0 \to M_i \to M_{i-1} \to \dots \to M_1 \to 0 \to \dots$$

où M_1 est en degré zéro, et les différentielles sont les morphismes évidents. Il est clair que l'on a une suite de monomorphismes $g_j^\cdot : X_j^\cdot \to X_{j+1}^\cdot$. Notons aussi $X^\cdot$ le complexe indécomposable de longueur nulle ayant M_t en degré zéro. L'homomorphisme $M_1 \to M_t$ d'image $S(a_0)$ induit un morphisme $f^\cdot : X_1^\cdot \to X^\cdot$. D'autre part, pour tout $j \ge 1$, il existe un morphisme $h_j^\cdot : X_j^\cdot \to X^\cdot$ tel que l'on a $f^\cdot = h_{j+1}^\cdot g_j^\cdot \cdots g_1^\cdot$. Comme $f^\cdot$ se trouve sur le cycle orienté de complexes indécomposables de longueur nulle définis par les modules M_i $(1 \le i \le t)$, on en déduit une contradiction à l'hypothèse que $D^b(A)$ est de cycles finis.

Par conséquent A est triangulaire et en particulier de dimension globale finie. Donc $D^b(A) \simeq \underline{\mathrm{mod}}\, \hat{A}$ (1.4) et $\underline{\mathrm{mod}}\, \hat{A}$ est de cycles finis. Soit maintenant $N_0 \to N_1 \to \dots \to N_s = N_0$ un cycle de $\mathrm{mod}\, \hat{A}$. Il suit de [R2](3), Lemme, qu'il existe un cycle correspondant $N_0 \to N_1' \to N_1 \to N_2' \to N_2 \to \dots N_s' \to N_s = N_0$ de $\underline{\mathrm{mod}}\, \hat{A}$. Ce cycle se trouve dans un tube du carquois d'Auslander-Reiten stable de $\hat{A}$. Donc le cycle original se trouve dans un tube de $\Gamma_{\hat{A}}$.

5.2 Notre résultat principal est le suivant:

<u>THEOREME</u> [AS3]. Soit A une algèbre telle que $D^b(A)$ est de cycles finis. Alors A est soit pré-inclinée de type Dynkin ou Euclidien, soit équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique.

Avant de donner une esquisse de la démonstration, indiquons quelques conséquences:

<u>COROLLAIRE (a)</u>: Soit A une algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $D^b(A)$ est de cycles finis

(ii) Il existe une algèbre C héréditaire de type Dynkin ou Euclidien, ou tubulaire canonique telle que $D^b(A) \simeq D^b(C)$, en tant que catégories triangulées.

(iii) A est pré-inclinée de type Dynkin ou Euclidien, ou équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique.

(iv) $\underline{\mathrm{mod}}\, \hat{A}$ est de cycles finis.

Démonstration: (i) $\Rightarrow$ (iv) suit de (5.1), alors que (iv) $\Rightarrow$ (i) est immédiat. D'autre part, (i) $\Rightarrow$ (iii) est le théorème, alors que (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) suivent de (1.3).

COROLLAIRE (b): Soit C une algèbre tubulaire canonique. Alors $D^b(A) \simeq D^b(C)$, en tant que catégories triangulées, si et seulement si A est équivalente à C pour les inclinaisons et les co-inclinaisons.

Démonstration: On utilise l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) du corollaire (a) et le théorème de Happel, Rickard et Schofield (voir (1.3)).

COROLLAIRE (c): Soient A une algèbre pré-inclinée de type Dynkin (respectivementm pré-inclinée de type Euclidien, équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique) et B une algèbre telle que $\underline{\mathrm{mod}}\ \hat{A} \simeq \underline{\mathrm{mod}}\ \hat{B}$. Alors B est aussi une algèbre pré-inclinée de type Dynkin (respectivement, pré-inclinée de type Euclidien, équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique).

Démonstration: En effet, il suit de l'hypothèse faite sur A que mod $\hat{A}$ est de cycles finis et de l'équivalence stable que mod $\hat{B}$ est aussi de cycles finis.

5.3 Passons maintenant à la démonstration du théorème. Soit A une algèbre telle que $D^b(A)$ est de cycles finis. Il résulte de (5.1) que A est triangulaire et mod $\hat{A}$ est de cycles finis. Si A n'est pas simplement connexe, alors il résulte du théorème (4.3) que A est pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$. On peut donc supposer que A est simplement connexe. Si A est pré-inclinée de type Dynkin, il n'y a rien à démontrer. Sinon, il existe une suite d'algèbres $A = A_o, A_1, \ldots, A_{m+1} = B$ et une suite de modules inclinants d'APR, $T^i_{A_i}$ $(0 \leq i \leq m)$ telles que $A_{i+1} = \mathrm{End}\ T^i_{A_i}$ et B est de représentation infinie (voir [A2] ou [TW2] et [AHR]). Comme $D^b(A) \simeq D^b(B)$, mod $\hat{B}$ est de cycles finis. D'autre part, B n'est pas pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ puisque sinon on aurait $\underline{\mathrm{mod}}\ \hat{A} \simeq \underline{\mathrm{mod}}\ \hat{B} \simeq \underline{\mathrm{mod}}\ \hat{H}$ pour H héréditaire de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ et ceci entraînerait,d'après (3.3), que A est pré-inclinée de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$, une contradiction. Donc B est simplement connexe. On peut donc supposer dès le départ que A est simplement connexe de représentation infinie. Compte tenu du théorème (2.4), il suffira de montrer que A est un agrandissement par branches d'une algèbre docile dérobée C en des modules simples réguliers, et que le type tubulaire n_A de A est domestique ou tubulaire mais pas de la forme (p,q) . Cela donnera en même temps la réciproque du théorème (2.4). Nous indiquons les étapes du travail.

On commence par prouver que A contient une sous-catégorie pleine et convexe C qui est une algèbre docile dérobée. On considère ensuite les extensions ponctuelles de C. On démontre successivement:

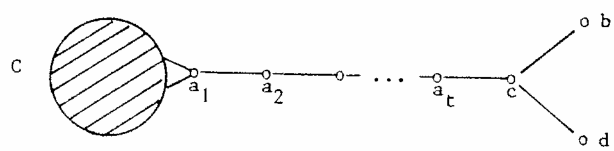
1) Soit $B = C[M]$ une extension ponctuelle de C qui est une sous-catégorie pleine de $\hat{A}$. Alors M est un C-module simple régulier.

2) Soit $B = C[M]$ une extension ponctuelle de C par un C-module simple régulier. Alors $B[M]$ n'est pas une sous-catégorie pleine de $\hat{A}$.

3) Soient $B = C[M]$ une extension ponctuelle de C par un C-module simple régulier M, avec point d'extension a, et $D = B[X]$ une extension ponctuelle de B, avec point d'extension b. Supposons que D est une sous-catégorie pleine de A et N est un facteur direct indécomposable de X contenant $S(a)$ dans sa coiffe. Alors $N \xrightarrow{\sim} P(a)_B$ ou $N \xrightarrow{\sim} S(a)_B$.

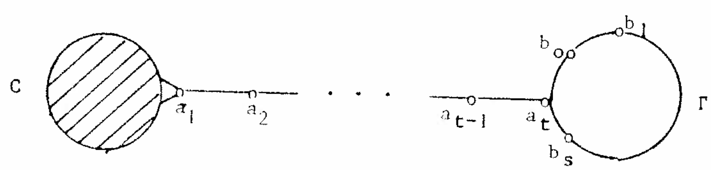
On prouve ensuite que trois sortes de configurations ne peuvent apparaître:

4) A ne contient pas de sous-catégorie pleine de la forme:



où les arêtes peuvent être orientées arbitrairement, et la sous-catégorie pleine formée par les points a_t, b, c, d est héréditaire.

5) A ne contient pas de sous-catégorie pleine de la forme:



où les arêtes peuvent être orientées arbitrairement, et Γ est un cycle non-commutatif.

6) Soient a et b deux objets de A n'appartenant pas à C, tous deux reliés à C par (au moins) une arête. Alors toute allée de A passant par a et b doit couper C.

Les deux dernières assertions se démontrent au moyen de techniques de revêtement. Il s'ensuit facilement que A est un agrandissement de C par branches en des modules simples réguliers. Enfin, pour montrer que n_A est domestique ou tubulaire, on prouve que, si ce n'est pas le cas, mod $\hat{A}$ contient une sous-catégorie de la forme mod K, pour K héréditaire sauvage, et cela contredit le fait que mod $\hat{A}$ est de cycles finis.

6. Formes quadratiques:

6.1. Nous avons obtenu une description complète des algèbres pré-inclinées de type Euclidien de représentation infinie (théorème (2.4)) ainsi qu'une classification des algèbres pré-inclinées de type $\tilde{\mathbb{A}}_m$ (théorèmes (3.1) et (3.4)). Il reste donc à caractériser les algèbres pré-inclinées de représentation finie, de type Dynkin ou Euclidien $\neq \tilde{\mathbb{A}}_m$. On sait déjà d'après le théorème (4.3) qu'elles sont simplement connexes. Nous donnons maintenant un critère pratique permettant d'identifier ces algèbres au moyen de leurs formes quadratiques. Rappelons la définition. Soient A une algèbre de dimension globale finie et $S(1), \dots S(n)$ un ensemble complet de représentants des classes d'isomorphisme des A-modules simples. La forme quadratique (homologique) q_A de A est la forme sur le groupe de Grothendieck $K_o(A)$ de A dont la matrice $\kappa_A = [\kappa_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ est donnée par:

$$\kappa_{ij} = \sum_{s \geq o} (-1)^s \dim_k \mathrm{Ext}^s_A(S(i),S(j)).$$

Cette somme est finie puisque l'on a supposé $\mathrm{dim.gl.}\, A < \infty$. Il résulte de [HR1] (3.2) que, si (B,T,A) est un triplet inclinant, alors les formes q_A et q_B ou, ce qui revient au même, leurs matrices κ_A et κ_B sont $\mathbb{Z}$-congruentes, c'est à dire qu'il existe une matrice $x \in GL_n(\mathbb{Z})$ telle que $\kappa_A = x^t \kappa_B x$. En particulier, si A est pré-inclinée de type Dynkin (respectivement, Euclidien) alors q_A est définie positive (respectivement, semi-définie positive de corang un).

6.2. THÉORÈME [AS4]. Soit A une algèbre de représentation finie.
(i) A est pré-inclinée de type Dynkin si et seulement si A est simplement connexe et q_A est définie positive.
(ii) A est pré-inclinée de type Euclidien $\tilde{\mathbb{D}}_n$ ou $\tilde{\mathbb{E}}_p$ si et seulement si A est simplement connexe et q_A est semi-définie positive de corang un.

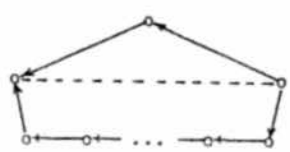
La première partie du théorème a également été obtenue par Happel (communication privée). Nous en obtenons une démonstration simple, qui découle d'ailleurs de la démonstration de la seconde partie. Cette dernière utilise le théorème (2.4). En effet, la nécessité étant évidente, nous devons démontrer la suffisance. Si A est simplement connexe avec q_A semi-définie positive, A ne peut être une algèbre pré-inclinée de type Dynkin. On démontre que cela entraîne l'existence d'une suite de réflexions de A telle que $B = S^+_{i_t} \dots S^+_{i_1} A$ est de représentation infinie mais que, pour tout $j < t$, $S^+_{i_j} \dots S^+_{i_1} A$ est de représentation finie [ANS] (3.4). Il faut ensuite prouver que B est un agrandissement par branches d'une algèbre docile dérobée en des modules simples réguliers. Les étapes sont semblables à celles de la démonstration du théorème (5.3). On déduit du théorème la proposition:

PROPOSITION. Soit A une algèbre pré-inclinée de type Dynkin (respectivement, Euclidien) et B une sous-catégorie pleine et convexe de A. Alors B est une algèbre pré-inclinée de type Dynkin (respectivement, Dynkin ou Euclidien).

7. Algèbres pré-inclinées de type $\mathbb{D}_n$:

7.1. Dans cette section, nous classifions les algèbres pré-inclinées de type $\mathbb{D}_n$ par leurs carquois liés. Dans [Y], Yamagata avait donné une caractérisation, en termes de leurs carquois d'Auslander-Reiten, des algèbres dont l'extension triviale est de représentation finie et de classe de Cartan $\mathbb{D}_n$ (c'est à dire, par [AHR], des algèbres pré-inclinées de type $\mathbb{D}_n$). D'autre part, les algèbres inclinées de type $\mathbb{D}_n$ ont été classifiées par Conti [C] au moyen de la théorie des arbres gradués de [BoG]. Nous allons montrer que les algèbres pré-inclinées de type $\mathbb{D}_n$ sont des agrandissements par branches. Afin de définir les coeurs de ces agrandissements, nous utiliserons les deux lemmes suivants de D. Happel [H1] (6).

LEMME (a) Soit A une algèbre pré-inclinée de type $\mathbb{D}_n$. Si le carquois de A n'est pas un arbre, il contient un sous-carquois lié plein de la forme:

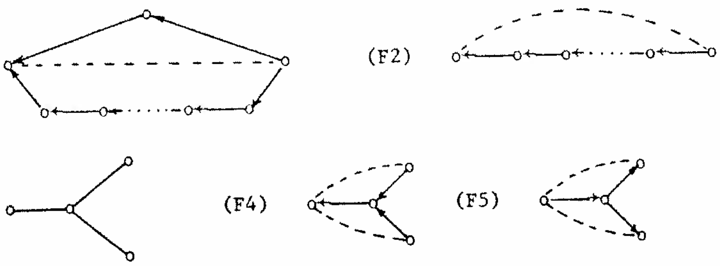


Ici, et dans toute cette section, des lignes en pointillé dans un carquois indiquent que la somme des chemins de la source au but est nulle. Une arête non-orientée peut être orientée arbitrairement.

LEMME (b) Soit A une algèbre pré-inclinée de type $\mathbb{D}_n$. Si A n'est pas donnée par le carquois lié du lemme (a), son carquois contient une source ou un puits i n'ayant qu'un seul voisin et tel que $A/\langle e_i\rangle$ est pré-inclinée de type $\mathbb{A}_{n-1}$ ou $\mathbb{D}_{n-1}$.

Nous définissons un $\mathbb{D}_n$-cadre comme étant le carquois lié (Q,I) d'une algèbre pré-inclinée A de type $\mathbb{D}_n$ tel que, pour toute source ou tout puits $i \in Q_0$, $A/\langle e_i\rangle$ est pré-inclinée de type $\mathbb{A}_{n-1}$. Il est évident que toute algèbre pré-inclinée de type $\mathbb{D}_n$ contient un sous-carquois lié plein qui est un $\mathbb{D}_m$-cadre pour un $m \leq n$.

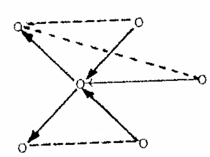
PROPOSITION. Les $\mathbb{D}_n$- cadres sont les carquois liés



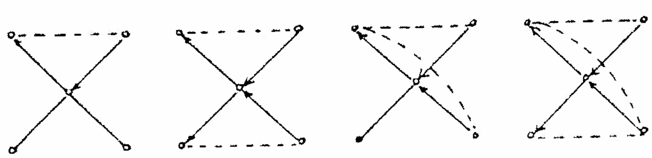
(Dans (F1) et (F2), on suppose que l'on a au moins 4 points).

Démonstration: Comme il est évident que les carquois liés de l'énoncé sont des $\mathbb{D}_n$-cadres, il faut prouver que ce sont les seuls. Soit donc (Q,I) un $\mathbb{D}_n$-cadre arbitraire.

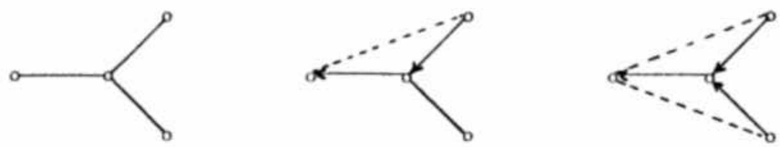
Si (Q,I) n'est pas un arbre, il contient un sous-carquois lié plein (Q',I') de la forme (F1). Mais alors Q = Q'. En effet, si ce n'est pas le cas, et si on enlève une source ou un puits de Q qui n'appartient pas à Q', le carquois lié résultant n'est évidemment pas celui d'une algèbre pré-inclinée de type $\mathbb{A}_{n-1}$. Supposons que (Q,I) est un arbre et aussi que (Q,I) n'est pas de la forme (F2). En particulier, I est engendré par des relations-zéro de longueur deux. Nous montrerons que (Q,I) est nécessairement d'une des formes (F3)(F4) ou (F5). Il est facile de voir que tout point de Q a au plus 5 voisins et que, si c'est le cas, (Q,I) est décrit localement par le carquois lié:



ou son opposé [H1] (6). Ainsi (Q,I) contient deux sous-carquois liés pleins des formes (F3) et (F4) (dualement, (F3) et (F5)). Cela entraîne, comme plus haut, que (Q,I) est en fait égal à l'un de ces cadres. Si tous les points de (Q,I) ont au plus 4 voisins, il est tout aussi facile de voir que (Q,I) est décrit localement par un des carquois liés:



ou des carquois opposés. Le même raisonnement entraîne que (Q,I) est égal à un cadre d'une des formes (F3)(F4) ou (F5). De même, si chaque point de (Q,I) a au plus 3 voisins, (Q,I) est décrit localement par un des carquois liés:



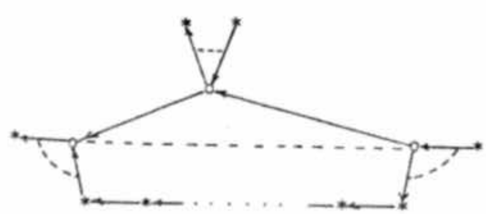
ou des carquois opposés. Donc (Q,I) est d'une des formes (F3)(F4) ou (F5). Enfin, si chaque point a au plus deux voisins, (Q,I) étant un $\mathbb{D}_n$-cadre doit contenir des relations-zéro de longueur au moins trois, une contradiction qui achève la démonstration.

<u>Remarque</u>: Observons que chaque $\mathbb{D}_n$-cadre contient une sous-catégorie pleine qui est un $\mathbb{D}_4$-cadre.

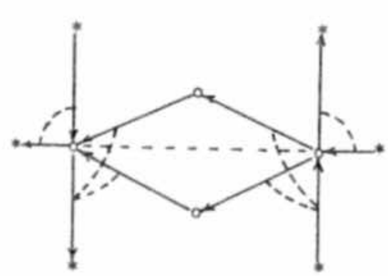
7.2. Soit (Q,I) un carquois lié, (Q',I') un sous-carquois lié plein et i un point de Q ayant au plus deux voisins dans Q'. Notons Q_i le sous-carquois lié plein de Q formé par i et ses voisins dans Q'. On dit que (Q,I) est un <u>agrandissement</u> de (Q',I') en i si le sous-carquois lié plein formé par la composante connexe de $(Q \setminus Q') \cup Q_i$ contenant i est une branche (voir (2.1)). Nous pouvons énoncer:

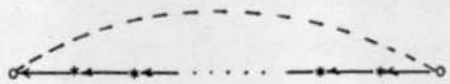
<u>THÉORÈME</u>. Une algèbre A est pré-inclinée de type $\mathbb{D}_n$ si et seulement si $A \xrightarrow{\sim} kQ/I$, où (Q,I) est un sous-carquois lié plein et connexe, contenant au moins un cadre, d'un agrandissement d'un des carquois liés suivants aux points marqués par des astérisques:

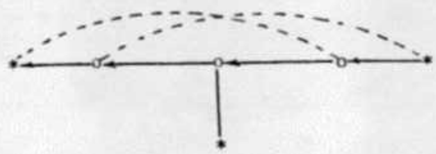
(D1)

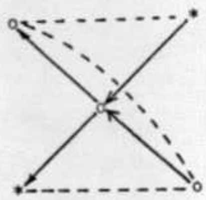


(D2)



(D3) 

(D4) 

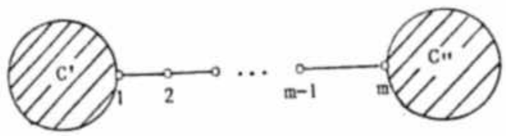
(D5) 

Dans (D1) (respectivement, (D3)), la relation de commutativité (respectivement, la relation-zéro) est supposée comprendre au moins 4 points. Remarquons que les carquois liés (D1) à (D5) sont auto-duals, ce qui facilite la vérification. Celle-ci se fait de la manière suivante. Si (Q,I) est un carquois lié donné, on commence par identifier le ou les $\mathbb{D}_n$-cadres qu'il contient, puis on essaie de faire coïncider ces cadres avec des cadres isomorphes apparaissant dans un des carquois liés (D1) à (D5). Il ne reste plus qu' à vérifier que le reste du carquois lié (Q,I) est une union disjointe de branches. On voit, par exemple, que l'on obtient toutes les algèbres héréditaires de type $\mathbb{D}_n$ à partir de (D1) et (D2) (et aussi de (D4)).

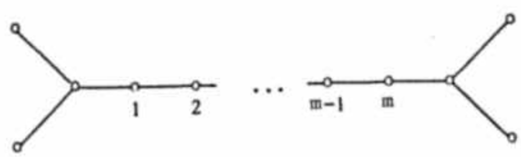
7.3. <u>Démonstration de la nécessité</u>: Dans tout ce qui suit, on supposera que $A = kQ/I$ est une algèbre pré-inclinée de type $\mathbb{D}_n$.

<u>LEMME</u> (a). Si (Q,I) contient deux cadres, ces deux cadres ont au moins deux flèches en commun.

<u>Démonstration</u>: (i) Supposons que ces deux cadres C' et C'' n'ont aucune flèche en commun. Remplaçant A par une sous-catégorie pleine convenable, on peut supposer A formée des deux cadres C', C'' et d'une allée de radical carré nul joignant C' et C''

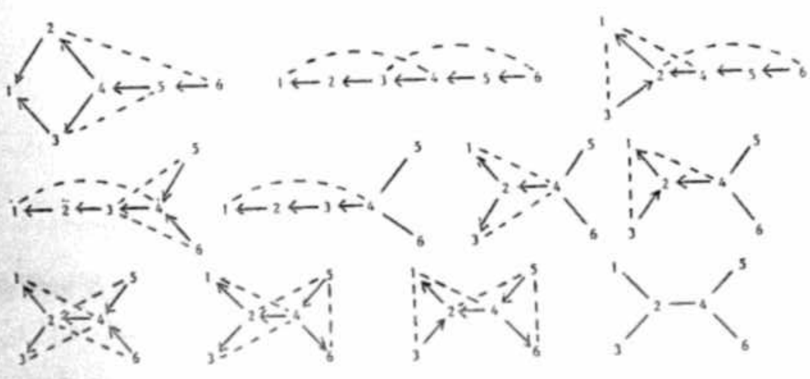


Si on applique des réflexions convenables aux puits et aux sources de C' et C'', on trouve une algèbre contenant une sous-catégorie pleine B (telle que $\hat{B}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{A}$) dont le carquois lié est de la forme:



avec la même allée $1 - 2 - .. - m\text{-}1 - m$ que A et deux cadres de type (F3). Appliquant, si nécessaire, des modules inclinants d'APR correspondant aux extrémités des cadres, on trouve une algèbre C de radical carré nul, de même graphe sous-jacent que B et telle que $\underline{\text{mod}}\ \hat{C} \simeq \underline{\text{mod}}\ \hat{B}$. Mais $\hat{C}$ n'est pas localement de représentation finie et cela contredit l'hypothèse que A est pré-inclinée de type Dynkin.

(ii) Supposons maintenant que C' et C'' ont exactement une flèche en commun. Remplaçant éventuellement A par une sous-catégorie pleine, on peut supposer A formée par la réunion de deux $\mathbb{D}_4$-cadres. On a alors, à dualité près, les possibilités suivantes:



Dans le premier cas, A est pré-inclinée de type $\mathbb{E}_6$. Dans les autres, $S_3^+S_2^+S_1^+A$, $S_6^-S_1^+A$, $S_6^-S_5^-S_1^+A$, S_1^+A, $S_3^+S_1^+A$, S_1^+A, $S_6^-S_5^-S_3^+S_1^+A$, $S_5^-S_3^+S_1^+A$, $S_5^-S_1^+A$ et A respectivement sont des algèbres héréditaires de type $\tilde{\mathbb{D}}_5$. Cette contradiction achève la démonstration.

Le lemme suivant donne une description complète des algèbres pré-inclinées de type $\mathbb{D}_n$ dont le carquois lié contient un cadre (F2) ayant au moins 5 points.

<u>LEMME</u> (b). Si (Q,I) contient un cadre C

$$\text{(F2)} \qquad 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow \quad \cdots \quad \leftarrow m-1 \leftarrow m$$

avec $m \geq 5$, alors (Q,I) est un agrandissement du cadre C aux points $2,\ldots,m-1$.

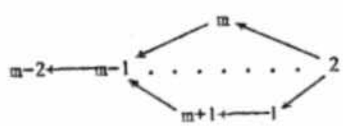
<u>Démonstration</u>: Soit $m+1$ un voisin dans Q d'un point de C et B l'algèbre du sous-carquois lié plein de (Q,I) formé des points $1,2\ldots m,m+1$. On considérera, à dualité près, toutes les façons possibles de joindre $m+1$ au cadre.

(i) Il existe une arête $m - m+1$ qui n'est pas contenue dans une relation de B. Alors le carquois lié de S_1^+B contient un sous-carquois plein héréditaire de type $\mathbb{E}_6$:

$$\begin{tikzcd} & & 1 \arrow[d] & & \\ m-3 & m-2 \arrow[l] & m-1 \arrow[l] & m \arrow[l] & m+1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

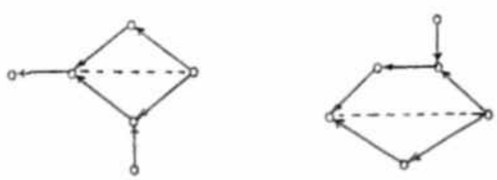
Cela contredit le fait que le carquois de $\underline{\text{mod}}\,\hat{A}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}\mathbb{D}_n$.

(ii) Il existe une flèche $m-1 \leftarrow m+1$ qui n'est pas contenue dans une relation de B. Alors le carquois lié de $S_2^+S_1^+B$ contient le sous-carquois lié plein:



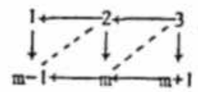
qui est celui d'une algèbre inclinée de type $\mathbb{E}_6$, une contradiction.

(iii) Il existe une flèche $i \leftarrow m+1$ $(1 < i < m-1)$ qui n'est pas contenue dans une relation de B. Alors S_1^+B contient une sous-catégorie pleine qui est inclinée de type $\mathbb{E}_6$ et donnée par un des carquois liés:

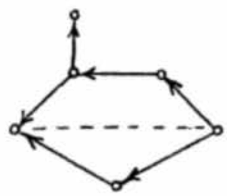


On en déduit encore une contradiction.

(iv) Il existe une flèche $m \leftarrow m+1$ contenue dans une relation-zéro de longueur $m-1$. Dans ce cas, le carquois lié de $S_3^+S_2^+S_1^+B$ contient le carquois lié de l'algèbre inclinée de type $\mathbb{E}_6$:



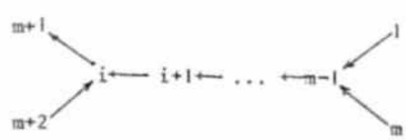
(v) Il existe une flèche $m \leftarrow m+1$ et $m+1$ est la source d'une relation-zéro de longueur $\ell < m-1$ dans B. Dans ce cas, il existe une sous-catégorie pleine de $S_{m-1}^+ \dots S_1^+B$ qui est héréditaire de type $\mathbb{E}_6$ ou bien inclinée de ce type donnée par le carquois lié:



(vi) Il existe une flèche $i \leftarrow m+1$, $i \leq m-2$ et une relation-zéro dans B de source $m+1$ et de longueur au moins trois. Alors le carquois lié de S_1^+B contient le carquois héréditaire de type $\tilde{\mathbb{D}}_p$:

ce qui contredit le fait que $\hat{A}$ est localement de représentation finie. De même si $i = m-1$.

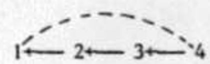
Enfin, supposons que (Q,I) contient trois relations-zéro $m+2 \leftarrow i \leftarrow m+1$, $m+2 \leftarrow i \leftarrow i+1$ et $i-1 \leftarrow i \leftarrow m+1$ (pour $2 \leq i \leq m-1$) et soit D l'algèbre du sous-carquois lié plein de (Q,I) formé par les points $1,2\dots m$, $m+1$, $m+2$. Alors le carquois lié de $S_{m+2}^+S_1^+D$ contient le carquois héréditaire:



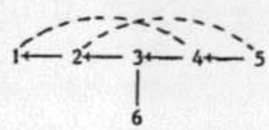
ce qui contredit le fait que $\hat{A}$ est localement de représentation finie. Les calculs précédents montrent aussi qu'un cadre de type (F2) (ayant au moins 5 points) ne partage aucune flèche avec un cadre de type (F1). Le résultat suit alors du lemme (a).

COROLLAIRE. Deux cadres de (Q,I) ayant une flèche en commun ont exactement deux flèches en commun.

LEMME (c). Si (Q,I) contient le cadre C:

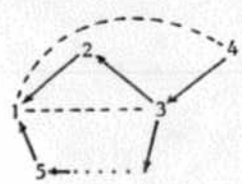


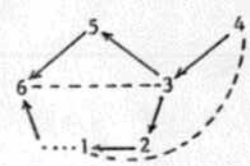
alors (Q,I) est soit un agrandissement de C en 2 et 3, soit un sous-carquois lié d'un agrandissement de (D4):



en 1, 5 et 6.

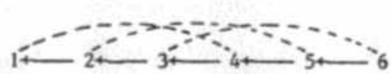
Démonstration: Supposons d'abord que (Q,I) contient un cadre $C' \neq C$. Il suit du corollaire précédent que C et C' ont exactement deux flèches en commun. C' n'est pas de la forme (F1) car sinon (Q,I) contient, à dualité près, un sous-carquois lié plein d'une des formes:

B': 

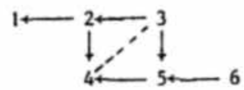
B": 

et S_1^+B' (respectivement, S_6^+B'') contient un sous-carquois plein héréditaire de type $\tilde{\mathbb{D}}_4$. Le lemme (b) entraîne que C' est d'une des formes (F2) (avec 4 points) ou (F3).

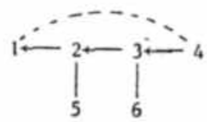
Supposons que (Q,I) contient un sous-carquois lié plein D de la forme:



Alors $S_3^+S_2^+S_1^+D$ est inclinée de type $\mathbb{E}_6$ donnée par le carquois lié:



ce qui contredit le fait que le carquois de $\underline{\text{mod}}\ \hat{A}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}\mathbb{D}_n$. En outre, (Q,I) ne contient pas de sous-carquois lié plein E de la forme:

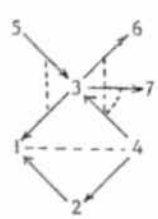
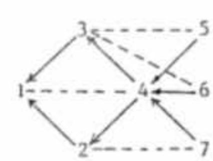


En effet, pour toute orientation des deux arêtes libres, E est une algèbre inclinée de type $\mathbb{E}_6$, encore une contradiction. Par conséquent, il suit du lemme (a) que (Q,I) est un agrandissement de C, ou un sous-carquois lié plein d'un agrandissement de (D4). Il est facile de voir que l'on ne peut agrandir C qu'en 2 et 3 et (D4) en 1, 5 et 6.

Nous avons prouvé la nécessité dans le cas où (Q,I) contient un cadre (F2). Dans les autres cas, elle résulte du lemme suivant:

<u>LEMME</u> (d). Si (Q,I) ne contient pas de cadre de type (F2), alors (Q,I) est un sous-carquois lié, contenant au moins un cadre, d'un agrandissement de (D1)(D2) ou (D5) aux points marqués d'un astérisque (voir (7.2)).

<u>Démonstration</u>: On suppose d'abord que (Q,I) contient un cadre (F1) ayant au moins 5 points. Alors les lemmes (b) et (c) et le corollaire du lemme (b) entraînent que le carquois lié (Q,I) est un sous-carquois lié plein d'un agrandissement de (D1) (si ce n'est pas le cas, (Q,I) contient un sous-carquois lié plein qui est incliné de type $\mathbb{E}_6$). Supposons maintenant que (Q,I) contient un $\mathbb{D}_4$-cadre (F1). Nous montrerons que (Q,I) est un sous-carquois lié plein d'un agrandissement de (D1) ou (D2). En effet, supposons que ce n'est pas le cas. Comme (Q,I) ne contient pas de sous-carquois lié plein héréditaire de type $\tilde{\mathbb{D}}_4$ ou incliné de type $\mathbb{E}_6$, alors (Q,I) contient, à dualité près, un des sous-carquois liés pleins suivants:

C:  D: 

Or, S_1^+D contient un sous-carquois héréditaire de type $\tilde{\mathbb{D}}_4$ et $S_7^+S_6^+S_1^+C$ est héréditaire de type $\tilde{\mathbb{D}}_6$, ce qui contredit le fait que $\hat{A}$ est localement de représentation finie. Ainsi (Q,I) est un sous-carquois lié plein d'un agrandissement de (D1) ou (D2). On montre facilement que l'agrandissement ne peut avoir lieu qu'aux points marqués d'un astérisque. Enfin, une analyse semblable à partir du cadre (F3) (respectivement, (F4), (F5)) donne un agrandissement de (D1)(D2) ou (D4) (respectivement, (D2) ou (D5) dans les deux cas) aux points marqués d'un astérisque. Cela achève la démonstration.

7.4. <u>Démonstration de la suffisance</u>: Soit C la classe des algèbres données par un carquois lié satisfaisant les conditions du théorème. On doit montrer que, si A appartient à C, alors A est pré-inclinée de type $\mathbb{D}_n$. Il suffit de prouver que C est fermée sous l'action des modules inclinants d'APR. En effet, si A dans C n'est pas héréditaire, il existe une suite d'algèbres $A = A_o, A_1, \dots A_{t_i}$ et une suite de modules inclinants d'APR $T^i_{A_i}$ $(o \leq i < t)$ telles que $A_{i+1} = \operatorname{End} T^i_{A_i}$ et $n(A_t) > n(A)$ (où $n(C)$ désigne le nombre de classes d'isomorphisme de C-modules indécomposables) [A2][TW2]. Or, après un certain nombre de telles étapes, on aboutit à une algèbre héréditaire de la classe C (sinon il existerait un nombre infini d'algèbres de C, en particulier simplement connexes de représentation finie, deux à deux non-isomorphes et ayant le même nombre de modules simples, une absurdité). Et il est évident qu'une algèbre de C est héréditaire si et seulement si elle est l'algèbre des chemins d'un carquois de graphe sous-jacent $\mathbb{D}_n$.

Pour montrer que C est fermée sous l'action des modules inclinants d'APR, on remarque qu'il suffit d'étudier ceux qui correspondent aux puits qui sont les buts d'au moins une relation (sinon l'action du module consiste simplement à inverser l'orientation des flèches passant par ce puits, sans affecter les relations). L'assertion (et donc le théorème) suivent du lemme suivant dont la démonstration est simple et peut être laissée au lecteur.

<u>LEMME</u>. Soient A une algèbre de C, a un puits de Q_A qui est le but d'au moins une relation, $T^{(a)}_A$ le module inclinant d'APR correspondant et $B = \operatorname{End} T^{(a)}_A$. Notons b^* (pour $b \neq a$) le point de Q_B correspondant au facteur indécomposable $P(b)_A$ de $T^{(a)}$, et a^* le point correspondant à $\tau^{-1}P(a)$. Alors $B \xrightarrow{\sim} kQ_B/I_B$ où (Q_B, I_B) est obtenue comme suit:

(i) A chaque flèche $b \to a$ de Q_A correspond une flèche $a^* \to b^*$.

(ii) A chaque relation de c vers a correspond une flèche $c^* \to a^*$.

(iii) A chaque flèche $b \to c$ $(c \neq a)$ telle qu'il n'existe pas de relation $b \to c \to a$ correspond une flèche $b^* \to c^*$. Si une telle relation existe, on a des flèches $b^* \to a^* \to c^*$.

(iv) Toute flèche de Q_B est d'une des formes précédentes.

(v) Toute relation de I_A de but distinct de a induit, de façon évidente, une relation de I_B.

(vi) Soit w un chemin de Q_B de b^* vers c^* de longueur au moins deux, avec $a \neq b$ et $\mathrm{Hom}_A(P(c), P(b)) = 0$. Si $a \neq c$, alors w est une relation-zéro. Si $a = c$, alors w est une relation-zéro si et seulement s'il existe un unique voisin ℓ de a se trouvant sur un chemin de b vers a et en outre $\mathrm{Hom}_A(P(\ell), P(b)) = 0$.

(vii) Si w_1 et w_2 sont deux chemins de Q_B de mêmes extrémités et de longueur au moins deux, alors il existe une relation de commutativité liant w_1 et w_2.

(viii) Les relations précédentes donnent un système minimal de générateurs de I_B.

BIBLIOGRAPHIE:

[A1] ASSEM, I.: Iterated tilted algebras of types $\mathbb{B}_n$ and $\mathbb{C}_n$, J. Algebra 84, No. 2 (1983), 361-390.

[A2] ASSEM, I.: Separating splitting tilting modules and hereditary algebras, Bull. Can. Math. 30 (2) (1987).

[AH] ASSEM, I. et HAPPEL, D.: Generalized tilted algebras of type $\mathbb{A}_n$, Comm. Algebra 9 (1981), 2101-2125.

[AHR] ASSEM, I., HAPPEL, D. et ROLDÁN, O.: Representation-finite trivial extension algebras, J. Pure Appl. Algebra 33 (1984), 235-242.

[ANS] ASSEM, I., NEHRING, J. et SKOWROŃSKI, A.: Domestic trivial extensions of simply connected algebras, à paraître

[AS1] ASSEM, I. et SKOWROŃSKI, A.: Iterated tilted algebras of type $\tilde{\mathbb{A}}_n$, Math. Z., Band 195, Heft 2 (1987), 269-290.

[AS2] ASSEM, I. et SKOWROŃSKI, A.: On some classes of simply connected algebras, à paraître

[AS3] ASSEM, I. et SKOWROŃSKI, A.: Algebras with cycle-finite derived categories, à paraître dans Math. Annalen.

[AS4] ASSEM, I. et SKOWROŃSKI, A.: Quadratic forms and iterated tilted algebras, à paraître.

[APR] AUSLANDER, M., PLATZECK, M.-I. et REITEN, I.: Coxeter functors without diagrams, Trans. Amer. Math. Soc. 250 (1979), 1-46.

[B] BAUTISTA, R.: Sections in Auslander-Reiten quivers, Proc. ICRA II (Ottawa, 1979), Springer Lecture Notes No. 832 (1980), 74-96.

[BLS] BAUTISTA, R., LARRIÓN, F. et SALMERÓN, L.: On simply connected algebras, J. London Math. Soc. (2) 27 (1983), No. 2, 212-220.

[Bo] BONGARTZ, K.: A criterion for finite representation type, Math. Annalen, Band 269, Heft 1 (1984), 1-12.

[BoG] BONGARTZ, K. et GABRIEL, P.: Covering spaces in representation theory, Invent. Math. 65 (1981/82), No. 3, 331-378.

[BrG] BRETSCHER, O. et GABRIEL, P.: The standard form of a representation-finite algebra, Bull. Soc. Math. France 111 (1983), 21-40.

[C] CONTI, B.: Simply connected algebras of tree class $\mathbb{A}_n$ and $\mathbb{D}_n$, Proc. ICRA IV (Ottawa, 1984), Springer Lecture Notes No. 1177 (1986), 60-90.

[DS] DOWBOR, P. et SKOWROŃSKI, A.: Galois coverings of representation-infinite algebras, Comment. Math. Helv. Vol. 62, No. 2 (1987), 311-337.

[G1] GABRIEL, P.: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, Proc. ICRA II (Ottawa, 1979), Springer Lecture Notes No. 831 (1980), 1-71.

[G2] GABRIEL, P.: The universal cover of a representation-finite algebra, Proc. ICRA III (Puebla, 1980), Springer Lecture Notes No. 903 (1981), 65-105.

[Gr] GREEN, E.L.: Graphs with relations, coverings and group-graded algebras, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 279 (1983), 297-310.

[H1] HAPPEL, D.: Tilting sets on cylinders, Proc. London Math. Soc (3), 51 (1985), 21-55.

[H2] HAPPEL, D.: On the derived category of a finite-dimensional algebra, à paraître dans Comment. Math. Helv.

[HRS] HAPPEL, D., RICKARD, J. et SCHOFIELD, A.: Piecewise hereditary algebras, à paraître.

[HR1] HAPPEL, D. et RINGEL, C.M.: Tilted algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), No. 2, 399-443.

[HR2] HAPPEL, D. et RINGEL, C.M.: The derived category of a tubular algebra, Proc. ICRA IV (Ottawa, 1984), Springer Lecture Notes No. 1177 (1986), 156-180.

[HW] HUGHES, D. et WASCHBOSCH, J.: Trivial extensions of tilted algebras, Proc. London Math. Soc. 46 (3) (1983), 347-364.

[MP] MARTINEZ-VILLA, R. et DE LA PEÑA, J.A.: The universal cover of a quiver with relations, J. Pure Appl. Algebra 30 (1983), 277-292.

[NS] NEHRING, J. et SKOWROŃSKI, A.: Polynomial growth trivial extensions of simply connected algebras, à paraître.

[R1] RINGEL, C.M.: Tame algebras and integral quadratic forms, Springer Lecture Notes No. 1099 (1984).

[R2] RINGEL, C.M.: Representation theory of finite-dimensional algebras, dans: Representations of Algebras, Proc. Durham 1985, Cambridge University Press (1986), 7-80.

[S] SKOWROŃSKI, A.: Generalization of Yamagata's theorem on trivial extensions, Archiv. Math. 48 (1987), 68-76.

[SW] SKOWROŃSKI, A. et WASCHBOSCH, J.: Representation-finite biserial algebras, J. Reine Angew. Math. 345 (1983), 172-181.

[TW1] TACHIKAWA, H. et WAKAMATSU, T.: Tilting functors and stable equivalences for self-injective algebras, à paraître dans J. Algebra.

[TW2] TACHIKAWA, H. et WAKAMATSU, T. Applications of reflection functors for self-injective algebras, Proc. ICRA IV (1984) Springer Lecture Notes No. 1077 (1986), 308-327.

[V] VERDIER, J.-L.: Catégories dérivées, état 0, Springer Lecture Notes No. 569 (1977), 262-311.

[WW] WALD, B. et WASCHBOSCH, J.: Tame biserial algebras, J. Algebra 95 (1985), 480-500.

[W] WAKAMATSU, T.: Stable equivalence between universal covers of trivial extension self-injective algebras, Tsukuba J. Math. Vol. 9, No. 2 (1985), 299-316.

[Y] YAMAGATA, K.: On algebras whose trivial extensions are of finite representation type II. Preprint (1983).

Ibrahim Assem
Département de Mathématiques et de Statistiques
Université Carleton
Promenade Colonel By
Ottawa, Ontario
Canada, K1S 5B6

Andrzej Skowroński
Institut de Mathématiques
Université Nicolas Copernic
Chopina 12/18
87-100 Toruń
Pologne.