Sponsored by the departments of mathematics of Queen's University, the Universities of Toronto and Waterloo.
Subventionné par les départements de mathématiques des Universités Queen's, de Toronto et de Waterloo.

ALGEBRES HEREDITAIRES ET TUBULAIRES PAR MORCEAUX

Ibrahim Assem et Andrzej Skowroński

Présenté par V. Dlab, F.R.S.C.

RESUME: Nous caractérisons les algèbres dont la catégorie dérivée est équivalente à la catégorie dérivée d'une algèbre héréditaire de type Dynkin ou Euclidien, ou d'une algèbre tubulaire canonique.

1. Soit k un corps algébriquement clos. Toutes nos algèbres sont associatives, unifères et de k-dimension finie. Sans perte de généralité, on peut aussi les supposer sobres et connexes. Tous nos modules sont à droite et de k-dimension finie. Soit A une algèbre, et $D^b(A)$ la catégorie dérivée des complexes bornés sur la catégorie mod A des A-modules [V]. Pour un graphe fini et connexe Δ, on dit que A est héréditaire par morceaux de type Δ [HI] si $D^b(A)$ est équivalente, en tant que catégorie triangulée, à $D^b(C)$, où C est une algèbre héréditaire dont le carquois ordinaire [G] admet Δ comme graphe sous-jacent. On se limitera dans cette note à considérer le cas où Δ est un graphe de Dynkin ou un graphe Euclidien, ce qui correspond au cas où C est de type de représentation classifiable. De même, on dit que A est tubulaire par morceaux si $D^b(A)$ est équivalente, en tant que catégorie triangulée, à $D^b(C)$, où C est une algèbre tubulaire canonique [R]. L'objectif de cette note est de présenter quelques résultats obtenus dans la classification de ces algèbres.

2. On rappelle qu'un module T_A est dit inclinant (respectivement, co-inclinant) [HR] si $\mathrm{Ext}_A^2(T,-) = 0$ (respectivement, $\mathrm{Ext}_A^2(-,T) = 0$), $\mathrm{Ext}_A^1(T,T) = 0$, et le nombre de facteurs directs indécomposables non-isomorphes de T_A est égal au rang du groupe de Grothendieck $K_0(A)$. Deux algèbres A et B sont dites équivalentes pour les inclinaisons et les co-inclinaisons s'il existe une suite d'algèbres $A_0 = A, A_1, \ldots A_{m+1} = B$ et une suite de modules inclinants ou co-inclinants $T^i_{A_i}$ $(i = 0, 1, \ldots m)$ tels que $A_{i+1} = \mathrm{End}\, T^i_{A_i}$. Si B est héréditaire ayant Δ comme graphe sous-jacent de son carquois, et si en outre chaque T^i est un

A_i-module inclinant tel que, pour tout module indécomposable M_{A_i}, on a soit $\mathrm{Hom}_{A_i}(T^i,M) = 0$, soit $\mathrm{Ext}^1_{A_i}(T^i,M) = 0$, on dit que A est une algèbre pré-inclinée de type Δ [AH]. Enfin, si $m \leq 1$, A est dite inclinée [HR]. Il suit de [H1][H2] que les conditions suivantes sont équivalentes pour une algèbre A et un graphe Δ, Dynkin ou Euclidien:

(i) A est héréditaire par morceaux de type Δ.

(ii) A est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre héréditaire de type Δ.

(iii) A est pré-inclinée de type Δ.

La caractérisation des algèbres héréditaires par morceaux de type Dynkin ou Euclidien se ramène donc à celle des algèbres pré-inclinées.

3. Soit A une algèbre triangulaire, c'est à dire dont le carquois ordinaire n'a pas de cycles orientés. En particulier, la dimension globale de A est finie et par conséquent, la catégorie dérivée $D^b(A)$ s'identifie à la catégorie d'homotopie des complexes bornés de A-modules projectifs $K^b(\mathrm{proj}\ A)$ [V]. Soit $P^\cdot$ un complexe indécomposable de $K^b(\mathrm{proj}\ A)$. Si $P^i = 0$ pour $i < p$ et $i > q$, alors que $P^p \neq 0$, $P^q \neq 0$, on dit que la largeur de $P^\cdot$ est $q-p+1$. La dimension globale forte de A est le suprémum des largeurs des complexes indécomposables de $K^b(\mathrm{proj}\ A)$. Il est clair que la dimension globale de A est plus petite ou égale à sa dimension globale forte. On dira aussi que $D^b(A)$ est de cycles finis si, pour toute suite de morphismes non-nuls et non-inversibles entre complexes indécomposables de $D^b(A)$ de la forme $M_0^\cdot \to M_1^\cdot \to \dots \to M_m^\cdot = M_0^\cdot$, les complexes $M_i^\cdot$ $(i = 0, 1, \dots m-1)$ se trouvent dans un tube (au sens de [R]) du carquois de $D^b(A)$ [H1]. On a:

THEOREME (A): Les conditions suivantes sont équivalentes pour une algèbre A:

(i) A est héréditaire par morceaux de type Dynkin ou Euclidien ou tubulaire par morceaux.

(ii) A est pré-inclinée de type Dynkin ou Euclidien ou équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique.

(iii) A est triangulaire, sa dimension globale forte est finie, et $D^b(A)$ est de cycles finis.

On en déduit que A est tubulaire par morceaux si et seulement si elle est équivalente pour les inclinaisons et les co-inclinaisons à une algèbre tubulaire canonique.

4. On sait que toute algèbre A s'écrit sous la forme $A \cong kQ/I$, où kQ est l'algèbre des chemins du carquois Q de A et I un idéal de kQ contenu dans $\mathrm{rad}^2 kQ$ [G]. Un tel isomorphisme est une présentation de A. Le groupe fondamental $\pi_1(Q,I)$ de la paire (Q,I) est défini dans [MP]. Une algèbre A sera dite simplement connexe si, pour toute présentation $A \cong kQ/I$ de A, Q n'a pas de cycles orientés et le groupe fondamental de (Q,I) est trivial.

THEOREME (B): Soit A une algèbre satisfaisant les conditions équivalentes du théorème (A). Alors A n'est pas simplement connexe si et seulement si elle est pré-inclinée de type $\tilde{A}_n$.

5. La classification se scinde donc en deux parties: le cas où A est pré-inclinée de type $\tilde{A}_n$ et le cas simplement connexe. Dans le premier cas, on a:

THEOREME (C): Une algèbre A est pré-inclinée de type $\tilde{A}_n$ si et seulement si on peut trouver une présentation $A \cong kQ/I$ telle que (Q,I) a exactement $n+1$ sommets et satisfait les conditions suivantes:

(i) Le nombre de flèches de source ou de but donné est au plus égal à deux.

(ii) I est engendré par un ensemble de chemins de longueur deux (appelés relations).

(iii) Pour chaque flèche α, il existe au plus une flèche β et une flèche γ telles que $\alpha\beta$ et $\gamma\alpha$ n'appartiennent pas à I.

(iv) Pour chaque flèche α, il existe au plus une flèche λ et une flèche μ telles que $\alpha\lambda$ et $\mu\alpha$ appartiennent à I.

(v) Q contient un cycle unique (non-orienté) C sur lequel le nombre de relations dans le sens des aiguilles d'une montre égale le nombre de relations dans le sens contraire.

On voit de suite que le groupe fondamental de (Q,I) est isomorphe à $\mathbb{Z}$. En outre, A est de représentation finie si et seulement si le cycle C est lié. Dans ce cas, nous obtenons aussi une caractérisation de A par les propriétés de son carquois d'Auslander-Reiten.

6. Dans le cas simplement connexe, on considère deux cas: si A est de représentation infinie, on obtient une description complète (par carquois liés) de l'algèbre A. Si A est de représentation finie, on utilise sa forme quadratique: soit $S_1, S_2 \dots S_n$ un ensemble complet des classes d'isomorphisme des A-modules simples. La forme quadratique q_A de A est la forme sur $K_0(A)$ dont la matrice $[q_{ij}]$ est donnée par:

$$q_{ij} = \sum_{t \geq 0} (-1)^t \dim_k \mathrm{Ext}_A^t (S_i, S_j)$$

Happel a démontré que A est pré-inclinée de type Dynkin si et seulement si A est simplement connexe et q_A positive définie. Nos méthodes permettent de donner une démonstration simple de ce résultat. Nous démontrons aussi que:

THEOREME (D): Une algèbre A de représentation finie est pré-inclinée de type Euclidien $\neq \tilde{A}_n$ si et seulement si A est simplement connexe et q_A positive semidéfinie de corang un.

Rappelons que la connexité simple d'une algèbre de représentation finie s'exprime au moyen d'un critère combinatoire simple (la condition (S) de Bautista-Larrión-Salmerón).

7. Les résultats précédents s'appliquent à l'étude des extensions triviales domestiques. L'extension triviale T(A) de A par son cogénérateur injectif minimal ${}_A DA_A = \mathrm{Hom}_k({}_A A_A, k)$ est l'algèbre dont la structure additive est celle du groupe abélien $A \oplus DA$ et dont la multiplication est définie par:

$$(a,f)\,(b,g) = (ab, ag+fb)$$

pour $a,b \in A$ et $f,g \in DA$. T(A) est une algèbre auto-injective et même symétrique. On rappelle aussi qu'une algèbre B est dite domestique s'il existe un nombre fini de foncteurs (de paramétrisation) F_i: mod $k[X] \to$ mod B, où i = 1, 2, ... t tels que:

(a) Pour chaque i, $F_i = - \otimes_{k[X]} Q_i$ où Q_i est un k[X]-B-bimodule, libre et de type fini en tant que k[X]-module.

(b) Pour chaque dimension d, toutes les classes d'isomorphisme de B-modules indécomposables, sauf au plus un nombre fini, sont de la forme $F_i(M)$

pour un i et un k[X]-module indécomposable M.

Enfin, B est dite t-paramétrique si le nombre minimal de ces foncteurs est t.

On a le résultat suivant, obtenu avec J. Nehring (comparer avec [AHR]):

THEOREME (E): Soit A une algèbre simplement connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) T(A) est domestique de représentation infinie.

(ii) T(A) est 2-paramétrique.

(iii) A est pré-inclinée de type Euclidien $\neq \tilde{A}_n$.

(iv) Il existe une algèbre inclinée B de représentation infinie et de type $\neq \tilde{A}_n$ telle que $T(A) \cong T(B)$.

Note: Ces résultats ont été obtenus alors que les auteurs visitaient l'Université de Bielefeld en tant que boursiers Alexandre von Humboldt. Ils voudraient remercier C. M. Ringel pour son hospitalité.

BIBLIOGRAPHIE:

[AH] Assem, I. et Happel, D.: Generalized tilted algebras of type A_n, Comm. Algebra 9 (1981) (20), 2101-2125.

[AHR] Assem, I.; Happel, D. et Roldán, O.: Representation-finite trivial extension algebras, J. Pure Appl. Algebra 33 (1984), 235-242.

[G] Gabriel, P.: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, Proc. ICRA II (Ottawa 1979), Springer Lecture Notes No. 831 (1980), 1-71.

[H1] Happel, D.: On the derived category of a finite-dimensional algebra, à paraître dans Comment. Math. Helv.

[H2] Happel, D.: Iterated tilted algebras of affine type, à paraître dans Comm. Algebra.

[HR] Happel, D. et Ringel, C. M.: Tilted algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), No. 2, 399-443.

[MP] Martínez-Villa, R. et de la Peña, J. A.: The universal cover of a quiver with relations, J. Pure Appl. Algebra 30 (1983), 277-292.

[R] Ringel, C. M.: Tame algebras and integral quadratic forms, Springer Lecture Notes No. 1099 (1984).

[V] Verdier, J.-L.: Catégories dérivées, état 0, dans SGA $4\frac{1}{2}$, Springer Lecture Notes No. 569 (1977), 262-311.

Ibrahim Assem
Faculté de Mathématiques
Université de Bielefeld
4800 Bielefeld 1
République Fédérale Allemande

Andrzej Skowroński
Institut de Mathématiques
Université Nicolas Copernic
87-100, Toruń, Chopina 12/18
Pologne

Received January 6, 1987